MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

(Patrik Bak)

Riešenie:

V dotyčnom trojuholníku označme písmenom p prvočíselnú dĺžku jednej odvesny a písmenami a, b celočíselné dĺžky druhej odvesny, resp. prepony.

Rovnosť z Pytagorovej vety $p^2 + a^2 = b^2$ prepíšeme do tvaru

$$p^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Oba činitele $b + a$ a $b - a$ sú zrejme prirodzené čísla. Číslo p^2 je možné však takto rozložiť na súčin len dvoma spôsobmi – $p \cdot p$ a $1 \cdot p^2$. Pretože navyše $b - a < b + a$, musí platiť $b - a = 1$ a $b + a = p^2$.

Podľa zadania pre obvod nášho trojuholníka platí $p+a+b = 11990$. Ak dosadíme za $a+b$ hodnotu p^2, dostaneme $p + p^2 = 11990$. Teraz máme niekoľko možností, ako odtiaľ určiť hľadané prvočíslo p.

- Číslo $p + p^2$ čiže $p(p + 1)$ je rovné číslu 11990, ktorého rozklad na prvočinitele je $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 109$. Odtiaľ plynie, že p je jedno z prvočísel 2, 5, 11 alebo 109. Avšak rovnosť $p(p + 1) = 11990$ z nich spĺňa iba 109 (kedy pritom $p + 1 = 110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$). Ak uhádneme, že rovnica $x(x + 1) = 11990$ má riešenie $x = 109$, potom stačí dodať, že iné kladné riešenie v obore kladných reálnych čísel neexistuje, lebo funkcia $x \mapsto x(x + 1)$ je na intervale $(0, \infty)$ všade rastúca. (Ak totiž $0 < u < v$, platí tiež $0 < u + 1 < v + 1$, a preto podľa pravidla o násobení nerovnosťou platí $u(u + 1) < v(v + 1)$.)
- Kvadratická rovnica $p^2 + p - 11990 = 0$ má dva korene tvaru $\frac{-1\pm\sqrt{1+47960}}{2}$ čiže $\frac{-1\pm 219}{2}$, t. j. 109 a -110, z ktorých prvočíslom je iba 109.

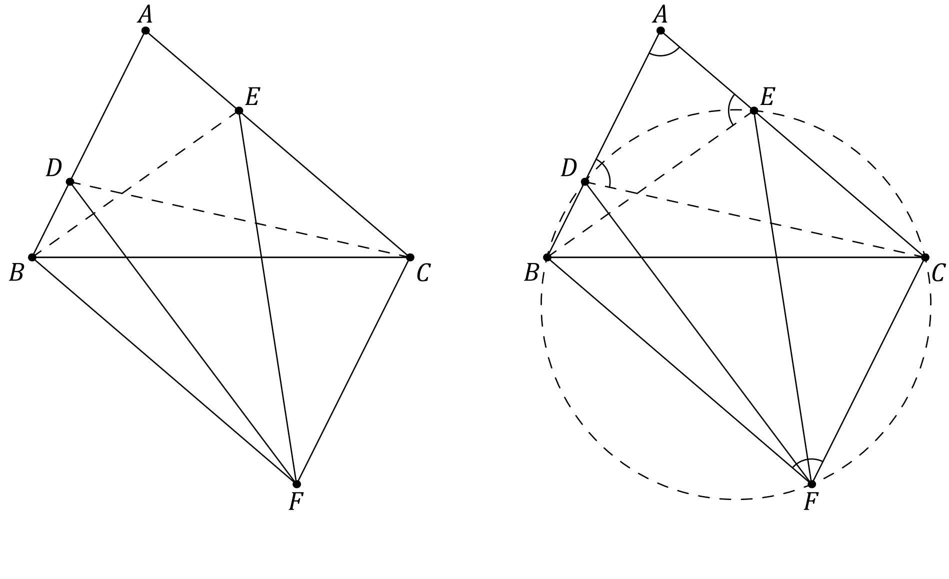
Platí teda $p = 109$. Potom z našich rovníc $b - a = 1$ a $b + a = p^2$ vychádza $a = \frac{1}{2}(p^2 - 1) = 5940$ a $b = a + 1 = 5941$, čo sú skutočne prirodzené čísla. A keďže naozaj platí $5940^2 + 109^2 = 5941^2$, podľa (obrátenej) Pytagorovej vety je trojuholník s týmito dĺžkami strán naozaj pravouhlý.

2 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

(Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Pretože $CE \parallel BF$ a $|BE| = |BA| = |FC|$ (pozri obrázok vľavo), tak $BFCE$ je rovnoramenný lichobežník (pozri návodnú úlohu N1). Podobne sa ukáže, že $CFBD$ je tiež rovnoramenný lichobežník. Pretože uhlopriečky každého rovnoramenného lichobežníka sú rovnako dlhé (pozri návodnú úlohu N3), máme $|BC| = |FE|$ a $|BC| = |FD|$. Odtiaľ už plynie $|FD| = |FE|$.



Riešenie 2:

Z rovnobežníka $ABFC$ a rovnoramenných trojuholníkov ADC, AEB plynie, že rovnakú veľkosť α majú štyri uhly BAC, BFC, ADC a AEB (vyznačené na obrázku vpravo oblúčikmi). Preto uhly BDC a CEB (susedný k ADC, resp. AEB) majú veľkosť $180° - \alpha$. Keďže ich vrcholy D a E ležia v opačnej polrovine s hranicou BC než vrchol F uhla BFC s veľkosťou α, sú oba štvoruholníky $BFCD$ a $BFCE$ tetivové. (Konvexný štvoruholník je tetivový, *práve keď* je súčet veľkostí dvoch jeho protiľahlých vnútorných uhlov rovný $180°$. Toto tvrdenie a jeho dôkaz nájdete na strane 20 brožúry *Kružnice* (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589) zo Školy mladých matematikov.) Odtiaľ dostávame, že body B, F, C, E, D ležia na jednej kružnici. Zo zhodnosti jej obvodových uhlov FBD a FCE (ako protiľahlých vnútorných uhlov rovnobežníka $ABFC$) plynie zhodnosť tetív FD a FE.

Riešenie 3:

Z porovnania rovnoramenných trojuholníkov ADC a AEB plynie, že uhly ADC a AEB sú zhodné. Preto sú tiež zhodné s nimi striedavé uhly FCD a EBF. Pre trojuholníky FCD a EBF to spolu s rovnosťami $|CF| = |BE|$ a $|CD| = |BF|$ (pozri prvé riešenie) znamená, že sú zhodné podľa vety *sus*. Preto sú zhodné aj ich tretie strany FD a FE, ako sme mali dokázať.

---

3 Určte počet deväťmiestnych čísel, v ktorých sa každá z číslic 0 až 9 vyskytuje najviac raz a v ktorých sa súčty číslic na 1. až 3. mieste, na 3. až 5. mieste, na 5. až 7. mieste a na 7. až 9. mieste vždy rovnajú 10. Nájdite aj najmenšie a najväčšie z týchto čísel.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Uvažujme ľubovoľné vyhovujúce číslo. Podľa zadania je v jeho dekadickom zápise $\overline{abcdefghi}$ deväť rôznych číslic. Desiatu (nezastúpenú) číslicu označíme j.

Vieme, že platí

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + i = 10.$$

Ak sčítame tieto štyri porovnania s 10, dostaneme

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + (c + e + g) = 40.$$

Zároveň vieme, že

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45,$$

t. j.

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45 - j.$$

Z toho dostávame $(45-j)+(c+e+g) = 40$, odkiaľ $j = 5+(c+e+g)$. Pretože však $j \leq 9$ a $c+e+g \geq 0+1+2 = 3$, pre rovnosť $j = 5 + (c + e + g)$ máme len dve možnosti: buď platí $j = 8$ a $\{c, e, g\} = \{0, 1, 2\}$, alebo platí $j = 9$ a $\{c, e, g\} = \{0, 1, 3\}$. Oba tieto navzájom sa vylučujúce prípady teraz posúdime oddelene.

- Prípad $j = 8$ a $\{c, e, g\} = \{0, 1, 2\}$.

  Pretože číslica 8 v uvažovanom čísle chýba, nemôžu v ňom byť číslice 0 a 2 spolu v žiadnej trojici, ktorá dáva súčet 10. Preto z rovností $c + d + e = 10 = e + f + g$ plynie $\{0, 2\} \neq \{c, e\}$ a $\{0, 2\} \neq \{e, g\}$, takže podľa $\{c, e, g\} = \{0, 1, 2\}$ musí platiť $\{0, 2\} = \{c, g\}$, a preto $e = 1$. Z oboch možností $(c, g) = (0, 2)$ a $(c, g) = (2, 0)$ podrobne rozoberieme tú prvú. Poznamenajme, že aj tu sa obe možnosti navzájom vylučujú.

  Nech teda $c = 0$ a $g = 2$. Potom štyri podmienky na súčty číslic budú (tiež s prihliadnutím na rovnosť $e = 1$) splnené, práve keď bude súčasne platiť $a + b = 10$, $d = 9$, $f = 7$ a $h + i = 8$. Pre doposiaľ neurčené číslice navyše platí $\{a, b, h, i\} = \{3, 4, 5, 6\}$. Platí preto $\{a, b\} = \{4, 6\}$ (dve možnosti – buď $a = 4$ a $b = 6$, alebo naopak) a $\{h, i\} = \{3, 5\}$ (tiež dve možnosti). Tým získavame $2 \cdot 2$ čiže 4 vyhovujúce čísla (460917235, 460917253, 640917235, 640917253).

  Podobným spôsobom je možné rozobrať druhú možnosť $c = 2$, $g = 0$, a získať tak ďalšie štyri vyhovujúce čísla. Namiesto toho si však stačí uvedomiť, že voľbou $c = 2$, $g = 0$ získame práve tie čísla, ktoré majú opačné poradie číslic než čísla získané pri prvej voľbe $c = 0$, $g = 2$; bude ich teda rovnaký počet. Tomuto prípadu teda zodpovedá celkovo $4 + 4$ čiže 8 vyhovujúcich čísel.

- Prípad $j = 9$ a $\{c, e, g\} = \{0, 1, 3\}$.

  Postupujme podobne ako v prvom prípade a píšme preto miestami stručnejšie: Pretože číslica 9 v hľadanom čísle chýba, nemôžu v ňom byť číslice 0 a 1 spolu v žiadnej trojici, ktorá dáva súčet 10. Preto z rovností $c + d + e = 10 = e + f + g$ tentokrát plynie $\{0, 1\} = \{c, g\}$ a $e = 3$. Prvá možnosť $(c, g) = (0, 1)$ vedie k podmienkam $a + b = 10$, $d = 7$, $f = 6$, $h + i = 9$ a $\{a, b, h, i\} = \{2, 4, 5, 8\}$. Teda $\{a, b\} = \{2, 8\}$ a $\{h, i\} = \{4, 5\}$, čo dáva opäť štyri vyhovujúce čísla. Druhá možnosť $(c, g) = (1, 0)$ dáva vďaka symetrii štyri ďalšie vyhovujúce čísla, takže aj v tomto prípade je ich dohromady 8.

Zhrňme výsledky oboch prípadov: Pretože sme žiadne číslo nikde nezapočítali dvakrát, vyhovujúcich čísel je celkovo $8 + 8$ čiže 16. Najväčšie z nich bude podľa nášho rozboru začínať číslicou 8, keď $b = 2$ a $\{h, i\} = \{4, 5\}$, bude to teda číslo 820736154. Podobne najmenšie vyhovujúce číslo bude začínať číslicou 2 a bude to číslo 280736145.

---

4 Určte počet reálnych koreňov rovnice

$$x \cdot |x + 6p| = 36$$

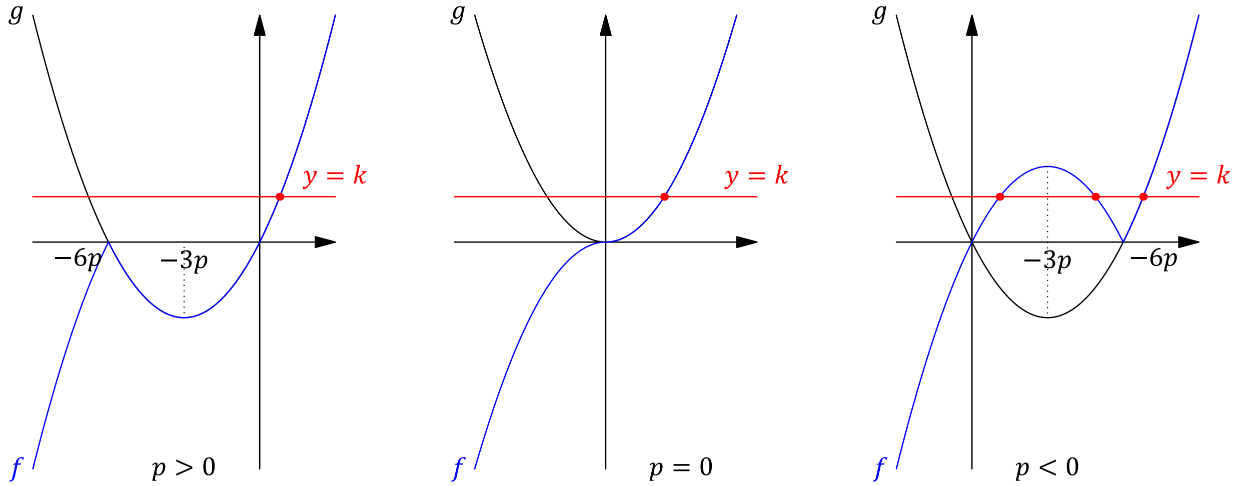
v závislosti na reálnom parametri p.

(Vojtech Bálint)

Riešenie 1:

Popíšeme najprv, ako získať graf funkcie f, kde $f(x) = x \cdot |x + 6p|$, z grafu kvadratickej funkcie g, kde $g(x) = x(x + 6p)$. Jej súvislosť s funkciou f je zrejmá: Ak $x \geq -6p$, tak $x + 6p \geq 0$, a preto $|x + 6p| = x + 6p$, teda $f(x) = g(x)$. Ak naopak $x < -6p$, tak $x + 6p < 0$, a preto $|x + 6p| = -(x + 6p)$, teda $f(x) = -g(x)$. Na intervale $[-6p, \infty)$ tak grafy oboch funkcií f a g splývajú. Na „doplnkovom“ intervale $(-\infty, -6p)$ sú oba grafy súmerne združené podľa osi x, takže túto časť grafu f dostaneme, keď príslušnú časť grafu g „preklopíme“ podľa osi x. V ďalšom odseku tento postup konkretizujeme.

Vieme, že grafom kvadratickej funkcie g (kde $g(x) = x(x+6p) = x^2 + 6px$) je parabola s osou, ktorou je priamka s rovnicou $x = -3p$. Parabola je pritom vďaka kladnému koeficientu pri člene x^2 „roztvorená nahor“ a pretína os x v bodoch 0 a $-6p$, ktoré v prípade $p = 0$ splývajú s bodom dotyku paraboly s osou x.



Našou úlohou je určiť počet reálnych koreňov rovnice $x \cdot |x + 6p| = 36$. Geometricky vzaté, je to vlastne počet priesečníkov grafu funkcie f s priamkou s rovnicou $y = 36$. Do každého z troch obrázkov je preto už červenou prikreslená aj jedna z priamok $y = k$ s (bližšie neurčeným) kladným parametrom k. Predstavíme si totiž polohu tejto priamky pre rôzne hodnoty k a odtiaľ učiníme potrebné závery.

Predovšetkým z prvých dvoch obrázkov vidíme, že pre prípady $p > 0$ a $p = 0$ je počet priesečníkov 1, a to nielen v prípade $k = 36$, ale pre akékoľvek kladné k. Z tretieho obrázku vychádza zložitejší záver: Počet priesečníkov pre prípad $p < 0$ bude 3, 2 alebo 1, a to podľa výsledku porovnania hodnoty 36 parametra k s y-ovou súradnicou vrcholu „modrej“ paraboly. Táto súradnica je rovná hodnote $f(-3p)$ čiže $-3p \cdot |-3p + 6p|$, t. j. $9p^2$. Počet priesečníkov tak bude 3, resp. 2, resp. 1, ak bude záporný parameter p spĺňať podmienku $36 < 9p^2$, resp. $36 = 9p^2$, resp. $36 > 9p^2$, ak teda bude platiť $p < -2$, resp. $p = -2$, resp. $-2 < p < 0$. Posledný prípad môžeme v zhrňujúcej odpovedi spojiť do jedného so skôr vyriešenými prípadmi $p = 0$ a $p > 0$.

Zhrnutím dostávame, že ak $p < -2$, tak rovnica má práve tri riešenia, ak $p = -2$, tak má práve dve riešenia, a ak $p > -2$, tak má práve jedno riešenie.

Riešenie 2:

Zadanú rovnicu $x \cdot |x + 6p| = 36$ vyriešime štandardným algebraickým postupom, pri ktorom sa „zbavíme“ absolútnej hodnoty tým, že rovnicu vyriešime oddelene na intervaloch, kde platí $x + 6p > 0$, resp. $x + 6p < 0$. Zostávajúca možnosť $x + 6p = 0$ je tvarom rovnice zrejme vylúčená.

- Nech $x \in (-6p, \infty)$.

  Riešime rovnicu $x(x + 6p) = 36$ čiže $x^2 + 6px - 36 = 0$. Pre jej diskriminant D_1 platí $D_1 = (6p)^2 + 4 \cdot 36 > 0$, takže rovnica má pre každú hodnotu parametra p dva reálne korene tvaru $\frac{-6p \pm \sqrt{D_1}}{2}$. Vďaka ostrej nerovnosti

$D_1 > (6p)^2$ platia aj nerovnosti $\sqrt{D_1} > 6p$ a $\sqrt{D_1} > -6p$, ktoré postupne znamenajú, že

$$\frac{-6p - \sqrt{D}}{2} < -6p \quad \text{a} \quad \frac{-6p + \sqrt{D}}{2} > -6p.$$

V uvažovanom intervale $(-6p, \infty)$ má teda rovnica práve jeden koreň, nech je hodnota p akákoľvek.

- Nech $x \in (-\infty, -6p)$.

  Riešime rovnicu $x(-x - 6p) = 36$ čiže $x^2 + 6px + 36 = 0$. Pre jej diskriminant D_2 platí $D_2 = (6p)^2 - 4 \cdot 36 = 36(p^2 - 4)$. Pre parameter p teraz musíme rozlíšiť tri prípady:

  - Ak $|p| < 2$, tak $D_2 < 0$, a rovnica preto nemá reálne korene.
  - Ak $|p| = 2$, tak $D_2 = 0$, a rovnica preto má dvojnásobný koreň $-3p$. Ten však leží v uvažovanom obore $(-\infty, -p)$, práve keď platí $-3p < -6p$ čiže $p < 0$. Z dvoch uvažovaných hodnôt ± 2 parametra p to spĺňa iba -2.
  - Ak $|p| > 2$, tak $D_2 > 0$, a rovnica preto má dva reálne korene tvaru $\frac{-6p \pm \sqrt{D_2}}{2}$. Všimnime si, že $\sqrt{D_2} = 6\sqrt{p^2 - 4} < 6\sqrt{p^2} = 6|p|$. Rozlíšme teraz, či $p > 2$, alebo $p < -2$:
    - Ak $p > 2$, tak $\sqrt{D_2} < 6p$, odkiaľ máme

      $$\frac{-6p - \sqrt{D_2}}{2} > \frac{-6p - \sqrt{D_2}}{2} > -6p,$$

      takže v uvažovanom intervale $(-\infty, -6p)$ nemá rovnica žiadny koreň.
    - Ak $p < -2$, tak $\sqrt{D'} < -6p$, odkiaľ máme

      $$< \frac{-6p - \sqrt{D_2}}{2} < \frac{-6p + \sqrt{D_2}}{2} < -6p,$$

      takže v našom intervale $(-\infty, -6p)$ má rovnica dva korene.

Ak zhrnieme zistené skutočnosti, dôjdeme k rovnakému záveru ako pri prvom riešení.

---

5 Nech $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný n-uholník. Bod A_3 zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_2A_4, získame tak bod A_3'. Potom bod A_3' zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_1A_3, čím získame bod A_3''. Pre ktoré n tiež, že $n \geq 4$, je bod A_3'' totožný s priesečníkom priamok A_1A_2 a A_3A_4?

(Jaroslav Zhouf)

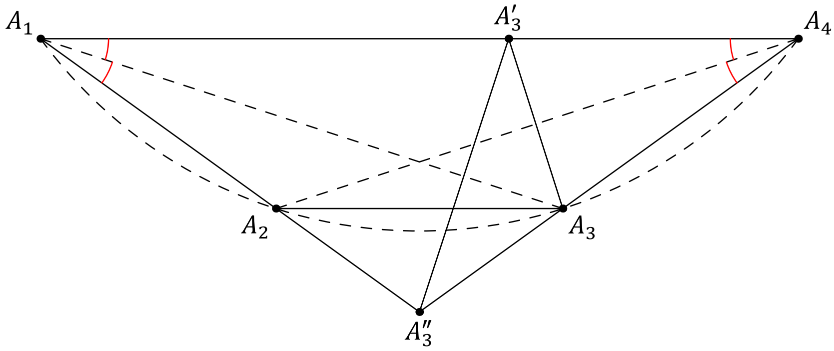
Riešenie 1:

Označme S stred kružnice opísanej n-uholníku $A_1A_2 \dots A_n$. Pretože stredový uhol A_iSA_{i+1} je rovný $360°/n$ pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$, všetky ostré obvodové uhly nad tetivami A_iA_{i+1} majú veľkosť $180°/n$. Štyri z nich sú na obrázku vyznačené červenou farbou. Ak $n = 4$, súčet veľkostí týchto štyroch červených uhlov je rovný $180°$, a teda priamky A_1A_2 a A_3A_4 sú rovnobežné, čo nie je možné. Ak $n \geq 5$, súčet veľkostí štyroch červených uhlov je menší než $180°$, teda priesečník priamok A_1A_2 a A_3A_4 leží na „zbiehajúcich sa" polpriamkach A_1A_2 a A_4A_3 (ako na obrázku).

Podľa dvoch zhodných červených uhlov pri vrchole A_4 je polpriamka A_4A_2 osou uhla $A_3A_4A_1$, a preto bod A_3' (obraz A_3 v osovej súmernosti podľa A_4A_2) leží na polpriamke A_4A_1, a to vnútri úsečky A_4A_1. Skutočne, požadovaná nerovnosť $|A_3A_4| < |A_1A_4|$ plynie z toho, že v trojuholníku $A_1A_3A_4$ vďaka nášmu predpokladu $n \geq 5$ platí

$$|\sphericalangle A_4A_1A_3| = \frac{180°}{n} < (n-3) \cdot \frac{180°}{n} = 180° - \frac{3 \cdot 180°}{n} = |\sphericalangle A_1A_3A_4|.$$

Podobne teraz zo zhodnosti uhlov pri vrchole A_1 plynie, že bod A_3'' (obraz A_3' v osovej súmernosti podľa A_1A_3) leží na polpriamke A_1A_2. Keďže toto platí v každom prípade $n \geq 5$, je našou úlohou zistiť, kedy bod A_3'' leží aj na polpriamke A_4A_3 čiže kedy je uhol $A_3''A_3A_4$ priamy.



Z rovnoramenného trojuholníka $A_3A_3'A_4$ máme $\left|\sphericalangle A_3'A_3A_4\right| = 90° - \frac{180°}{n}$, a preto

$$\left|\sphericalangle A_1A_3A_3'\right| = \left|\sphericalangle A_1A_3A_4\right| - \left|\sphericalangle A_3'A_3A_4\right| = \left(180° - \frac{3 \cdot 180°}{n}\right) - \left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 90° - \frac{360°}{n}.$$

Určený uhol $A_1A_3A_3'$ je však zhodný so súmerne združeným uhlom $A_1A_3A_3''$, takže uhol $A_3''A_3A_3'$ má dvojnásobnú veľkosť. Máme tak všetko pripravené na požadované vyjadrenie uhla $A_3''A_3A_4$:

$$\left|\sphericalangle A_3''A_3A_4\right| = \left|\sphericalangle A_3''A_3A_3'\right| + \left|\sphericalangle A_3'A_3A_4\right| = 2 \cdot \left|\sphericalangle A_1A_3A_3'\right| + \left|\sphericalangle A_3'A_3A_4\right| =$$
$$= 2 \cdot \left(90° - \frac{360°}{n}\right) + \left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 3 \cdot 90° - \frac{5 \cdot 180°}{n} = \frac{(3n-10) \cdot 180°}{2n}.$$

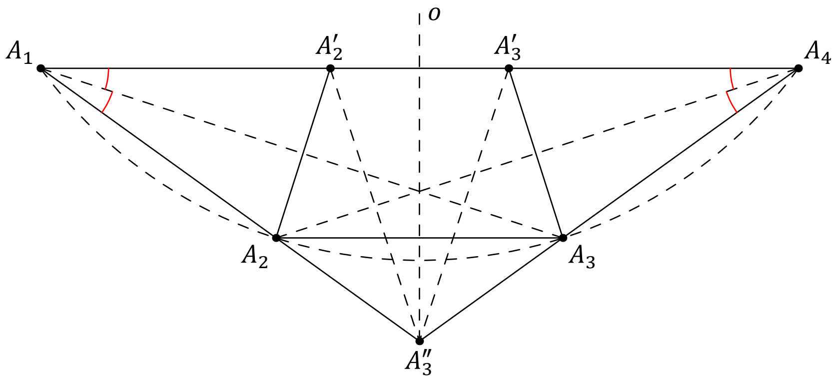
Posledný výraz má zrejme požadovanú hodnotu 180°, práve keď platí $3n - 10 = 2n$ čiže $n = 10$. Teda iba pri tomto n leží bod A_3'' na oboch priamkach A_1A_2 a A_3A_4.

Jediná vyhovujúca hodnota n je teda 10.

Riešenie 2:

V prvej časti riešenia budeme predpokladať, že bod A_3'' splýva s priesečníkom priamok A_1A_2 a A_3A_4, a ukážeme, že potom $n = 10$.

Najprv sa ako v prvom riešení zdôvodní, že $n \geq 5$ (inak zmienený priesečník neexistuje), že A_3' leží na polpriamke A_4A_1 a že priesečník A_3'' priamok A_1A_2 a A_3A_4 je aj priesečníkom polpriamok A_1A_2 a A_4A_3. Uvažujme ešte bod A_2', ktorý je obrazom bodu A_2 v súmernosti s osou A_1A_3, takže leží na polpriamke A_1A_4. Je možné dokázať, že body A_2', A_2, A_3'', A_3, A_3' sú vrcholy pravidelného päťuholníka. Nám však bude stačiť ukázať, že ide o päťuholník s piatimi navzájom zhodnými vnútornými uhlami. (Taký päťuholník je zrejme pravidelný, ak mu je možné opísať kružnicu. V našej situácii je jej existencia zrejmá z obrázku. Skutočne, pre priesečník P použitých osí A_2A_4, A_1A_3 totiž platí $|PA_3| = \left|PA_3'\right| = \left|PA_3''\right|$ a $|PA_2| = \left|PA_2'\right|$; zo súmernosti nášho n-uholníka plynie aj $|PA_2| = |PA_3|$, takže P je stred požadovanej kružnice.)



Teraz podrobne vysvetlíme, ako je naša situácia „symetrická“. Keďže uhly $A_1A_3A_2$ a $A_3A_1A_4$ sú zhodné, tetivy A_1A_4 a A_2A_3 kružnice opísanej nášmu n-uholníku sú rovnobežné. Osi oboch tetív sú teda tiež rovnobežné a obe prechádzajú stredom tejto kružnice, takže sú totožné. Táto spoločná os, ktorú označíme o, je teda osou súmernosti rovnoramenného lichobežníka $A_1A_2A_3A_4$, takže na nej leží aj priesečník A_3'' polpriamok A_1A_2 a A_3A_4. Podľa osi o sú navyše súmerne združené aj body A_2' a A_3' (plynie to z ich konštrukcie). Vďaka tomu sú body A_2' a A_3'' súmerne združené podľa priamky A_2A_4. Skutočne, keďže priamka A_1A_3 je os úsečky $A_3'A_3''$, po uplatnení súmernosti s osou o dostaneme to isté pre obraz priamky A_1A_3 a obraz úsečky $A_3'A_3''$, ktorými sú priamka A_2A_4 a úsečka $A_2'A_3''$.

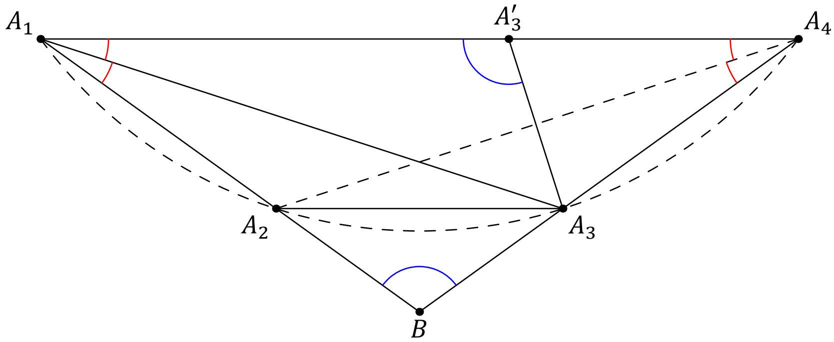
Všimnime si teraz, že vzdialenosť bodu A_4 od osi o je menšia než dĺžka úsečky A_4A_3'', ktorá je zhodná s úsečkou A_4A_2'. Preto bod A_2' polpriamky A_4A_1 leží v rovnakej polrovine s hranicou o ako bod A_1 (a symetricky bod A_3'

v rovnakej polrovine ako bod A_4). Tým sme dokázali, že $A'_2A_2A''_3A_3A'_3$ je skutočne päťuholník (ktorého hranica sama seba nepretína).

Napokon ukážeme, že všetky vnútorné uhly tohto päťuholníka sú zhodné. Zhodnosť uhlov pri vrcholoch A_2 a A'_2 plynie zo súmernosti s osou A_1A_3. Z tej istej súmernosti plynie aj zhodnosť uhlov pri vrcholoch A''_3 a A'_3. Podobne zo súmernosti s osou A_2A_4 získame zhodnosť uhlov ako pri vrcholoch A_3 a A'_3, tak pri vrcholoch A''_3 a A'_2. Tým je dokázáné, že všetkých päť uhlov má rovnakú veľkosť.

Keďže súčet vnútorných uhlov ľubovoľného päťuholníka je $3 \cdot 180°$, majú všetky vnútorné uhly nášho päťuholníka veľkosť $3 \cdot 180°/5 = 3 \cdot 36° = 108°$. Použime to pre uhol $A_2A''_3A_3$ čiže uhol $A_1A''_3A_4$. Máme tak $108° + 4 \cdot 180°/n = 180°$, z čoho $180°/n = 18°$, a teda $n = 10$, ako sme sľúbili ukázať.

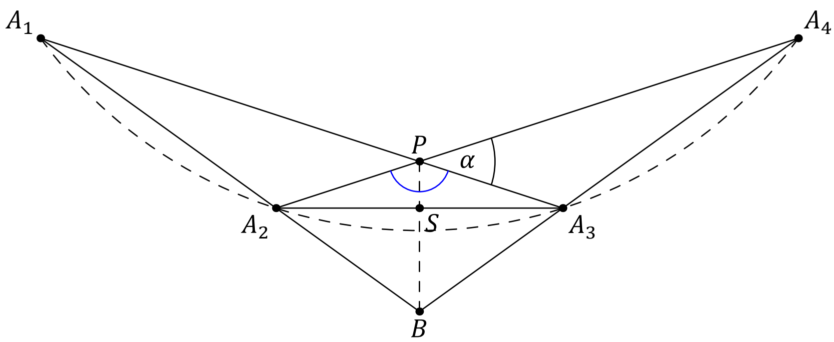
V druhej časti riešenia dokážeme, že hodnota 10 skutočne vyhovuje. V pravidelnom desaťuholníku $A_1A_2 \dots A_{10}$ označíme písmenom B priesečník polpriamok A_1A_2 a A_4A_3 a uvážime bod A'_3 zo zadania úlohy (obraz bodu A_3 v súmernosti s osou A_2A_4).



Pretože veľkosť červenou označených uhlov je $\frac{180°}{10}$ čiže $18°$, z trojuholníka A_1BA_4 dostávame $|\sphericalangle A_1BA_4| = 180° - 4 \cdot 18° = 108°$. Z rovnoramenného trojuholníka $A'_3A_3A_4$ potom $|\sphericalangle A_4A'_3A_3| = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot 18°) = 72°$. Veľkosť susedného uhla $A_3A'_3A_1$ je teda $108°$. Preto sú trojuholníky $A_3A_1A'_3$ a A_3A_1B podľa vety *uu* podobné, a teda (vďaka spoločnej strane A_1A_3) zhodné. Odtiaľ už plynie, že body B a A'_3 sú súmerne združené podľa priamky A_1A_3, a preto $B = A''_3$, ako sme chceli dokázať.

Riešenie 3:

Najprv sa ako v prvom riešení ukáže, že $n \neq 4$ a že pre každé n také, že $n \geq 5$, sa polpriamky A_1A_2 a A_4A_3 pretínajú. Označme B ich priesečník, S stred strany A_2A_3 a P priesečník uhlopriečok A_1A_3 a A_2A_4.



Os strany A_2A_3 je osou súmernosti pravidelného n-uholníka, dvojice priamok A_1A_2, A_3A_4, resp. A_1A_3, A_2A_4 sú podľa nej súmerne združené, body P, S, B tak na tejto osi ležia a uhol PSA_3 je pravý.

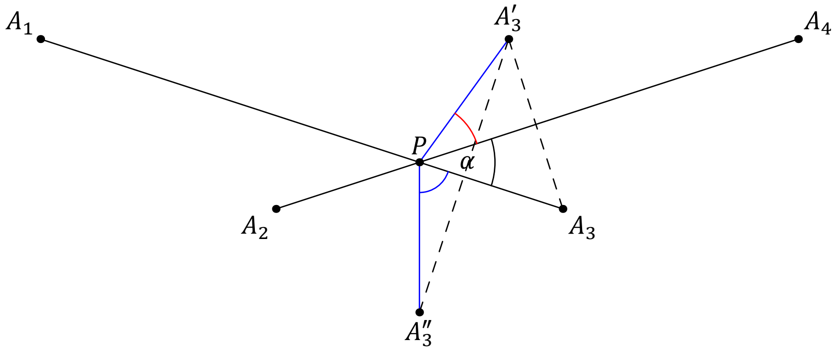
Je známe, že zloženie osových súmerností podľa priamok A_2A_4 a A_1A_3 je otočenie okolo ich priesečníka P o dvojnásobok uhla, ktorý tieto priamky zvierajú; nech $\alpha = |\sphericalangle A_4PA_3|$. Ak je bod B obrazom bodu A_3 v tomto otočení, veľkosť uhla A_3PB je 2α a zo súmernosti je veľkosť uhla A_2PB tiež 2α. Priamy uhol A_4PA_2 má tak veľkosť 5α, preto $\alpha = 180°/5 = 36°$. Veľkosť uhla PA_3S je preto z pravouhlého trojuholníka PSA_3 rovná $90° - 2\alpha$ čiže $18°$.

Rovnako ako v prvom riešení si uvedomme, že pravidelný n-uholník má veľkosť stredového uhla nad jednou stranou rovnú $360°/n$ a veľkosť obvodového uhla nad ňou $180°/n$. Dostaneme tak $18° = |\sphericalangle PA_3S| = |\sphericalangle A_1A_3A_2| = 180°/n$, odkiaľ $n = 10$.

Teraz dokážeme, že táto hodnota skutočne vyhovuje zadaniu. V pravidelnom desaťuholníku platí $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = 180°/10 = 18°$, z pravouhlého trojuholníka PSA_3 je veľkosť zhodných uhlov BPA_3 a BPA_2 rovná $72°$, teda veľkosť uhla A_3PA_4 je $36°$. Na to, aby bod B bol obrazom bodu A_3 v otočení so stredom P o uhol $72°$ (a teda jeho obrazom v zložení osových súmerností), tak stačí dokázať, že $|PA_3| = |PB|$. Veľkosť vonkajšieho uhla A_2A_3B pravidelného desaťuholníka je $36°$, teda veľkosť uhla PA_3B je $18° + 36°$ čiže $54°$. Z trojuholníka PA_3B dopočítame, že veľkosť uhla PBA_3 je tiež $54°$. Tento trojuholník je tak rovnoramenný so základňou BA_3, čo sme potrebovali ukázať.

Poznámka:

V práve podanom riešení sme sa odvolali na všeobecný výsledok o zložení dvoch súmerností s navzájom rôznobežnými osami. Potvrďme teraz jeho dôsledok pre našu situáciu priamo.



Zo zadanej konštrukcie bodov A_3', A_3'' použitím súmerností s osami A_2A_4, A_1A_3 plynie, že pre priesečník P týchto osí platí $|PA_3| = |PA_3'| = |PA_3''|$, že PA_4 je os uhla A_3PA_3' a že PA_3 je os uhla $A_3'PA_3''$. Preto pri použitom označení $\alpha = |\sphericalangle A_4PA_3|$ postupne dostaneme $|\sphericalangle A_3'PA_4| = \alpha$, $|\sphericalangle A_3'PA_3| = 2\alpha$ a $|\sphericalangle A_3PA_3''| = 2\alpha$. Bod A_3'' je teda obrazom bodu A_3 v otočení so stredom P a uhlom 2α, ktorý je orientovaný rovnako ako orientovaný uhol A_4PA_3. To je všetko, čo sme v našom riešení potrebovali.

Riešenie 4:

Rovnako ako v prvom riešení najskôr vylúčime prípad $n = 4$ a v ostatných prípadoch zdôvodníme existenciu priesečníka polpriamok A_1A_2 a A_4A_3, ktorý teraz označíme B. Ďalej ešte budeme využívať poznatky, že bod A_3' leží na polpriamke A_1A_4 a že A_1A_4B je rovnoramenný trojuholník, ktorého vnútorné uhly pri základni A_1A_4 majú veľkosť $360°/n$.

Máme zistiť, pre ktoré n platí rovnosť $B = A_3''$. Tú je možné vyjadriť aj takto: Bod A_3' polpriamky A_1A_4 splýva s tým bodom polpriamky A_1A_4, ktorý je obrazom bodu B v súmernosti s osou A_1A_3, t. j. ktorý má od bodu A_1 vzdialenosť $|A_1B|$. Ekvivalentne povedané: Bod A_3' leží na úsečke A_1A_4 a platí $|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3'A_4|$. Posledná rovnosť však sama zaručuje, že $|A_3'A_4| \leq |A_1A_4|$, a teda A_3' je bodom úsečky A_1A_4, preto vzhľadom na vzťah $|A_3'A_4| = |A_3A_4|$ môžeme konštatovať: Hľadáme práve tie n, pre ktoré platí $|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3A_4|$.

Nech $z = |A_1A_4|$ a $r = |A_1B| = |A_4B|$. Bod A_3 strany A_4B leží na osi uhla A_4A_1B, preto platí

$$|BA_3| : |A_3A_4| = |A_1B| : |A_1A_4| = r : z.$$

(Plynie to z dvojakého vyjadrenia pomeru obsahov trojuholníkov A_1BA_3 a $A_1A_3A_4$: raz cez totožné výšky z vrcholu A_1 a raz cez zhodné výšky z vrcholu A_3.) Odtiaľ vzhľadom na vzťah $|BA_3| + |A_3A_4| = r$ ľahko zistíme, že $|BA_3| = r^2/(r+z)$ a $|A_3A_4| = rz/(r+z)$. Dosaďme to teraz do rovnosti $|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3A_4|$ a ďalej ju ekvivalentne upravujme:

$$r = z - \frac{rz}{r+z},$$
$$r(r+z) = z(r+z) - rz,$$
$$z^2 - rz - r^2 = 0.$$

Táto kvadratická rovnica s neznámou z a parametrom r má jediný kladný koreň, a to $\frac{1+\sqrt{5}}{2}r$. Zdôraznime, že posledná rovnosť je pre kladné r, z ekvivalentná s rovnosťou $|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3A_4|$. Tá preto bude splnená, práve keď (podľa úvodného odseku tohto riešenia) bude platiť

$$\cos\frac{360°}{n} = \frac{z}{2r} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

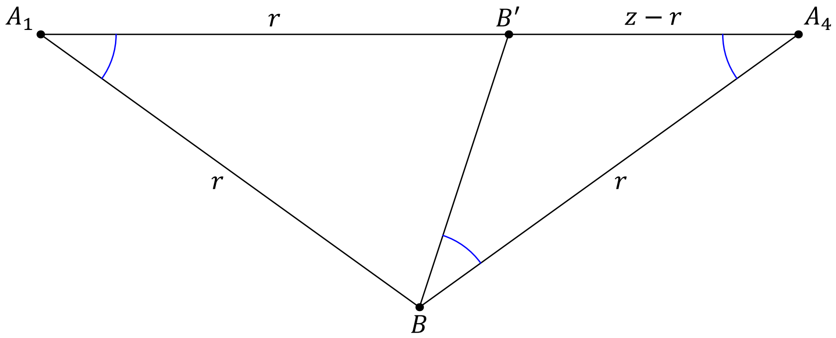
Posledné číslo je však známa hodnota $\cos 36°$ (je uvedená aj s odvodením, založenom na úvahách o pravidelnom päťuholníku, na stranách 50–54 knihy *Goniometrické funkce v elementární matematice* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404326), takže jediná vyhovujúca hodnota n je zrejme rovná 10 (lebo funkcia kosínus je na intervale $[0°, 90°]$ prostá).

Poznámka:

Ukážme, ako je možné toto riešenie dokončiť bez použitia funkcie kosínus s odkazom na známu hodnotu $\cos 36°$:

Po odvodení rovnosti $z^2 - rz - r^2 = 0$ ju prepíšeme ako $z(z-r) = r^2$. Posledný vzťah podľa významu dĺžok r a z znamená práve to, že na úsečke A_1A_4 (dĺžky z) existuje bod B', pre ktorý platí $|A_1B'| = r$ a zároveň platí

$|A_1A_4| \cdot |B'A_4| = |BA_4|^2$. Ukážeme, že za predpokladu $B' \in A_1A_4$ je táto rovnosť ekvivalentná s rovnosťou $|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle B'BA_4|$.



Skutočne, rovnosť $|A_1A_4| \cdot |B'A_4| = |BA_4|^2$ v tvare $|B'A_4| : |BA_4| = |BA_4| : |A_1A_4|$ zaručuje podobnosť trojuholníkov $B'A_4B$ a BA_4A_1 podľa vety *sus*, kým rovnosť $|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle B'BA_4|$ ju zaručuje podľa vety *uu* (pozri obrázok). (Ekvivalencia však tiež plynie okamžite z mocnosti bodu A_4 ku kružnici opísanej trojuholníku A_1BB' a porovnanie jej obvodového uhla BA_1A_4 s úsekovým uhlom $B'BA_4$. (S týmito pojmami sa môžete zoznámiť v brožúre *Kružnice* (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589) z edície Škola mladých matematikov.)

Hľadáme preto práve tie celé n, pre ktoré bod B' polpriamky A_1A_4 určený rovnosťou $|A_1B'| = |A_1B|$ leží na úsečke A_1A_4 a spĺňa rovnosť $|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle B'BA_4|$.

Keďže, ako vieme, $|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle BA_4A_1| = 360°/n$, platí

$$|\sphericalangle A_1BA_4| = 180° - 2 \cdot \frac{360°}{n} = \frac{(n-4) \cdot 180°}{n}$$

a z rovnoramenného trojuholníka A_1BB' zase vychádza

$$|\sphericalangle A_1BB'| = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \frac{(n-2) \cdot 180°}{2n}.$$

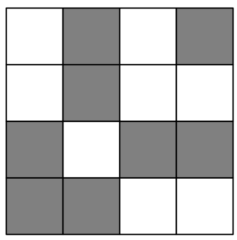
Odtiaľ predovšetkým ľahko zistíme, že nerovnosť $|\sphericalangle A_1BA_4| \geq |\sphericalangle A_1BB'|$ (vyjadrujúca fakt, že B' je bod úsečky A_1A_4) platí, práve keď $n \geq 6$. Pre také n potom máme

$$|\sphericalangle B'BA_4| = |\sphericalangle A_1BA_4| - |\sphericalangle A_1BB'| = \frac{(n-4) \cdot 180°}{n} - \frac{(n-2) \cdot 180°}{2n} = \frac{(n-6) \cdot 180°}{2n},$$

takže dostávame rovnicu $\frac{360°}{n} = \frac{(n-6) \cdot 180°}{2n}$ čiže $2 = \frac{n-6}{2}$, t. j. $n = 10$.

---

6 Je daná šachovnica $m \times n$, ktorej políčka sú ofarbené čiernou a bielou farbou klasickým spôsobom tak, že ľavé horné políčko je čierne. *Ťahom* rozumieme vzájomnú výmenu dvoch riadkov alebo vzájomnú výmenu dvoch stĺpcov šachovnice. *Škvrnou* rozumieme takú neprázdnu množinu čiernych políčok, ktorá je tvorená všetkými políčkami, do ktorých možno z jedného jej políčka prejsť po ceste pozostávajúcej z čiernych políčok susediacich stranou. Napríklad na obrázku je šachovnica 4×4 s práve štyrmi škvrnami. V závislosti na kladných celých číslach m a n určte, koľko najmenej škvŕn môže byť na šachovnici $m \times n$ po vykonaní konečného počtu ťahov.



(David Hruška)

Riešenie:

Na danej šachovnici označíme riadky (zhora nadol) aj stĺpce (zľava doprava), a to v oboch prípadoch striedavo písmenami A a B. (Motiváciou k takému značeniu riadkov a stĺpcov je jednak pravidlo na určovanie čiernych polí z konca druhého odseku riešenia, jednak výsledok návodnej úlohy N4.) Nazveme ich „typ“ riadku, resp. stĺpca. Všimneme si, že čierne políčka sú práve tie, ktoré sú prienikmi riadkov a stĺpcov rovnakého typu. Podľa neho budeme hovoriť o (čiernom) políčku typu A, resp. B. Typy riadkov, stĺpcov a políčok východiskovej šachovnice sú vyznačené na obrázku (rozmery m a n zatiaľ nie sú podstatné).

	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A	A		A		A		A		A
B		B		B		B		B	
A	A		A		A		A		A
B		B		B		B		B	
A	A		A		A		A		A
B		B		B		B		B	

Zavedené typy riadkov a stĺpcov s nimi pevne „spojíme“, t. j. budeme ich pri popísaných ťahoch tiež premiestňovať. Uvedomme si, že žiadne políčko nemení pri ťahoch svoj riadok ani svoj stĺpec (môže v nich iba zmeniť svoje miesto). Preto po ľubovoľnom počte ťahov platí to, čo na začiatku: čierne políčka sú práve tie, ktoré ležia v prieniku riadku a stĺpca toho istého typu A či B, a aj ony sú takéhoto typu.

Iste uhádneme, ako na šachovnici dosiahnuť „malý“ počet škvŕn: najprv vzájomnými výmenami riadkov dosiahneme to, aby všetky riadky typu A boli nad riadkami typu B (obrázok vľavo) a potom zariadime, aby všetky stĺpce typu A boli pred stĺpcami typu B (obrázok vpravo). Do oboch obrázkov sme vyznačili rozmiestnenie aj typ všetkých čiernych políčok – využili sme na to výhodne vyššie zdôvodnené pravidlo.

	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A	A		A		A		A		A
A	A		A		A		A		A
A	A		A		A		A		A
B		B		B		B		B	
B		B		B		B		B	
B		B		B		B		B	

	A	A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	A	A	A	A				
A	A	A	A	A	A				
A	A	A	A	A	A				
B						B	B	B	B
B						B	B	B	B
B						B	B	B	B

Na šachovnici na obrázku vpravo sú dve škvrny, v jej ľavom hornom rohu a v pravom dolnom rohu. Tak to dopadne vždy, keď riadky aj stĺpce oboch typov existujú. V opačnom prípade, keď $m = 1$ alebo $n = 1$, bude po našich ťahoch výsledná škvrna iba jedna; menej to však byť nemôže (čierne políčko zo zadania úlohy je vždy prvkom nejakej škvrny), takže tento prípad je vyriešený.

Zaoberajme sa teraz prípadom, keď nám skusmo vyšli škvrny dve, t. j. prípadom, keď $m > 1$ a $n > 1$. Prečo vtedy nie je možné nikdy dôjsť k jedinej škvrne na celej šachovnici? Platí totiž všeobecne to, čo vidíme na oboch obrázkoch: *V každej škvrne, ktorá kedy vznikne, sú všetky políčka toho istého typu* A *či* B. Toto tvrdenie dokážeme sporom: Pripusťme, že po určitom počte ťahov vznikne na šachovnici nejaká škvrna, ktorá obsahuje ako políčko typu A, tak políčko typu B. Potom na ceste vytvorenej z čiernych políčok, ktorá také dve políčka spája, iste nájdeme dve stranou susediace políčka také, že jedno je typu A a druhé typu B. Ich rôzny typ však znamená, že neležia ani v rovnakom riadku (ten by musel byť typu A aj typu B) ani v rovnakom stĺpci (podobne). To je však v spore s tým, že ide o dve políčka so spoločnou stranou.

Zhrnutím dostávame, že v prípade, keď $m = 1$ alebo $n = 1$, je hľadaný minimálny počet škvŕn 1 a v opačnom prípade je tento počet 2.