MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1 Hovoríme, že prirodzené číslo je *strakaté*, ak je v jeho dekadickom zápise každá cifra iná a všetky súčty troch susedných cifier daného čísla nadobúdajú práve dve rôzne hodnoty. (Napríklad číslo 162735 nie je strakaté, pretože posudzované súčty $1+6+2=9$, $6+2+7=15$, $2+7+3=12$ a $7+3+5=15$ nadobúdajú tri rôzne hodnoty.)

a) Uveďte príklad šesťciferného strakatého čísla.

b) Existuje sedemciferné strakaté číslo?

(Josef Tkadlec, Martin Melicher)

Riešenie:

a) Šesťciferné strakaté číslo je napríklad 573482, lebo súčty $5+7+3$, $7+3+4$, $3+4+8$, $4+8+2$ majú práve dve rôzne hodnoty 14 a 15.

B) Dokážeme, že žiadne sedemciferné strakaté číslo neexistuje.

Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že také číslo existuje, vyberme jedno z nich a jeho sedem navzájom rôznych cifier označme zľava doprava a, b, c, d, e, f, g.

Všimnime si, že súčet prvej trojice je $a+b+c$ a súčet druhej trojice je $b+c+d$. Keby sa tieto dva súčty rovnali, muselo by platiť $a=d$, čo odporuje tomu, že každá zastúpená cifra je iná. Súčet prvej trojice je teda rôzny od súčtu druhej trojice.

Z rovnakého dôvodu musia byť rôzne súčty čísel aj v každých dvoch ďalších susedných trojiciach (lebo majú vždy dve čísla spoločné).

Keďže vybrané číslo je strakaté a už súčty prvých dvoch trojíc, označme ich postupne S a R, sú navzájom rôzne, musí podľa záveru predchádzajúceho odseku platiť: súčet tretej trojice je S (susedná druhá trojica má totiž súčet R), a tak súčet štvrtej trojice je zasa R, a teda súčet piatej trojice je znova S.

Potom platí:

$$S-R=(e+f+g)-(a+b+c)=a-d,$$

$$S-R=(e+f+g)-(d+e+f)=g-d.$$

Porovnaním dostávame $a-d=g-d$, z čoho $a=g$, napriek tomu, že a a g sú navzájom rôzne cifry. To je spor, ktorým je existencia sedemciferného strakatého čísla vyvrátená.

Poznámka:

a) Aj keď sa dá na šesťciferné strakaté číslo prísť skusmo, opíšme spôsob, ako do jeho hľadania vniesť určitý systém. Ak si uvedomíme, že súčty trojíc susedných cifier musia nadobúdať striedavo dve rôzne hodnoty, dôjdeme k záveru, že cifry šesťciferného strakatého čísla musia byť zľava doprava tvaru a, b, c, $a+x$, $b-x$, $c+x$, kde $x\neq 0$. Podmienka $x\neq 0$ pre tvar $a+x$ štvrtej cifry musí byť splnená, aby sa táto štvrtá cifra nerovnala prvej cifre a. Tvar piatej cifry $b-x$ je potom riešením y rovnice $c+(a+x)+y=a+b+c$, tvar šiestej cifry $c+x$ potom riešením z rovnice $(a+x)+(b-x)+z=b+c+(a+x)$.

Zdôraznime, že sme našli nutné vyjadrenie $(a,b,c,a+x,b-x,c+x)$ cifier každého šesťciferného strakatého čísla. Potrebujeme však ešte, aby taká šestica neobsahovala dve rovnaké cifry. Ak napríklad $a=1$ a $x=1$, dostaneme šesticu $(1,b,c,2,b-1,c+1)$ a vidíme, že b musí byť aspoň 4. V prípade $b=4$ dostaneme šesticu $(1,4,c,2,3,c+1)$, ktorá bude zrejme vyhovovať pre ľubovoľné c z $\{5,6,7,8\}$. Tak v prípade $c=5$ získame strakaté číslo 145236.

Dodajme ešte, že šesťciferné číslo $\overline{abcdef}$ s navzájom rôznymi ciframi je strakaté práve vtedy, keď platí $a-d=e-b=c-f\neq 0$. Sú to totiž zjednodušene zapísané rovnosti

$$(a+b+c)-(b+c+d)=(c+d+e)-(b+c+d)=(c+d+e)-(d+e+f),$$

ktoré vyjadrujú práve to, že súčty trojíc susedných cifier nadobúdajú striedavo dve hodnoty, ktoré sú rôzne vďaka $a\neq d$.

b) Po odvodení sústavy rovností v podanom riešení

$$S = a + b + c = c + d + e = e + f + g,$$
$$R = b + c + d = R = d + e + f$$

môžeme tiež dôjsť ku sporu inými algebraickými manipuláciami, akými sú napríklad porovnávanie rôznych vyjadrení hodnôt S alebo R. Nebudeme ich tu uvádzať, namiesto toho objasníme, prečo krátke odvodenie spornej rovnosti $a = g$ v podanom riešení nie je také trikové, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať.

Ak budeme hľadať čo najjednoduchšie dôsledky tejto sústavy rovností, nemôžeme opomenúť možnosť odčítať od seba súčty susedných trojíc (dôjde totiž ku zrušeniu dvoch sčítancov v každej trojici). Dostaneme tak štyri rôzne vyjadrenia toho istého rozdielu $S - R$, a to

$$S - R = a - d = e - b = c - f = g - d.$$

Tak objavíme spornú rovnosť $a - d = g - d$ čiže $a = g$.

Alebo inak: Ak vieme z časti a) tejto poznámky, že prvých šesť cifier sedemciferného strakatého čísla je nutne tvaru $a, b, c, a + x, b - x, c + x$, musí byť siedma cifra opäť a, aby sa súčet piatej, šiestej a siedmej cifry rovnal $a + b + c$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

- A Uvedenie príkladu šesťciferného strakatého čísla (aj bez zdôvodnenia): 2 body, z toho 1 bod, ak sa príklad nepodarí nájsť, avšak je dosiahnutá nejaká parametrizácia šestice cifier podobne ako v časti a) poznámky, alebo sú odvodené tamojšie rovnosti $a - d = e - b = c - f$.
- B1 Negatívna odpoveď na otázku b): 0 bodov.
- B2 Voľba metódy dôkazu sporom: 0 bodov.
- B3 Zdôvodnenie, že susedné trojice majú rôzne súčty: 1 bod.
- B4 Zdôvodnenie, že rovnaké súčty majú prvá, tretia a piata trojica a tiež druhá a štvrtá trojica: 1 bod.

Celkom potom dajte súčet bodov z A, B3 a B4.

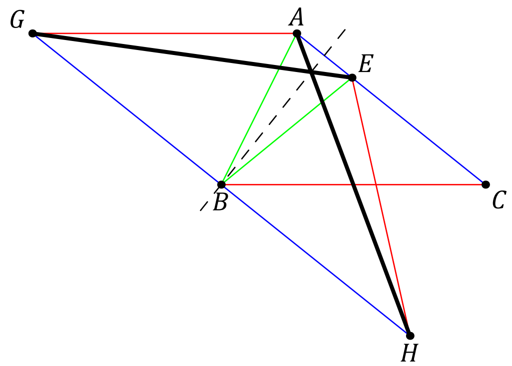
---

2 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s najdlhšou stranou BC. Vnútri jeho strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme ďalej body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ sú rovnobežníky. Dokážte, že $|FD| = |GE|$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

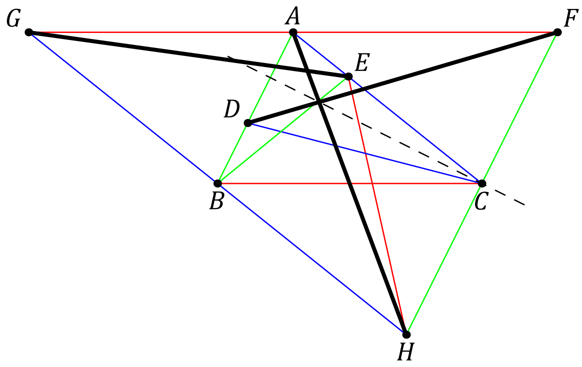
Uvažujme ešte bod H taký, že $CABH$ je rovnobežník. Tvrdenie úlohy získame ako zrejmý dôsledok dvoch analogických rovností $|HA| = |GE|$ a $|HA| = |FD|$. Na dôkaz prvej z nich využijeme obrázok bez vyznačeného bodu D.



Keďže úsečky GB a BH sú protiľahlými stranami ku strane AC v rovnobežníkoch $GBCA$, resp. $BHCA$, sú úsečky GB, AC a BH zhodné a rovnobežné. Bod B je teda stredom úsečky GH, a navyše platí $GH \parallel AC$, a teda aj $GH \parallel AE$. Keďže ABE je rovnoramenný trojuholník so základňou AE, leží jeho hlavný vrchol B na osi základne AE. Táto os je však aj osou úsečky GH (je na ňu totiž kolmá a prechádza jej stredom). Podľa tejto spoločnej osi je teda súmerný lichobežník $GHEA$, ktorý je preto rovnoramenný. Keďže uhlopriečky rovnoramenného lichobežníka sú zhodné, je avizovaná rovnosť $|HA| = |GE|$ dokázaná.

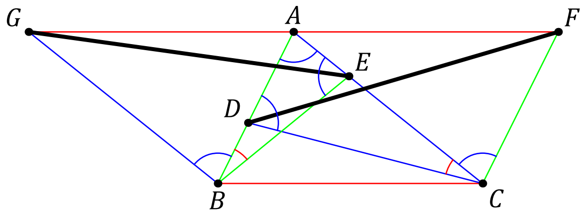
Riešenie možno zakončiť aj bez zmienky o rovnoramennom lichobežníku: Podľa spoločnej osi úsečiek AE a GH sú totiž úsečky HA a GE súmerne združené, a teda zhodné.

Rovnakým spôsobom sa dokáže, že aj úsečky AD a FH majú spoločnú os (čiže $FADH$ je rovnoramenný lichobežník) (pozri obrázok), odkiaľ vyplynie druhá potrebná rovnosť $|HA| = |FD|$. Tým je podľa úvodného odseku celé riešenie ukončené.



Riešenie 2:

Ukážeme, že trojuholníky GBE a DCF sú zhodné podľa vety *sus*, uplatnenej na dvojice ich strán so spoločným vrcholom B, resp. C (pozri obrázok). Tak budeme s riešením hotoví, lebo zhodnosť tretích strán GE a DF je práve tým tvrdením, ktoré máme dokázať.



Začneme s dôkazom zhodnosti uhlov GBE a DCF. Na to budeme zhodné uhly na obrázku vyznačovať oblúčikmi jednej farby. Najskôr porovnáme všetky vnútorné uhly rovnoramenných trojuholníkov ADC a EAB. Tie pri ich základniach AD, resp. EA sú na obrázku všetky vyznačené modrou farbou, lebo pre ich veľkosti platí:

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle BEA|.$$

Z toho vyplýva aj zhodnosť zvyšných vnútorných uhlov DCA a ABE, vyznačených na obrázku červenou. Okrem nich sú tam ešte vyznačené modrou uhly GBA a ACF, ktoré sú oba striedavé (a teda zhodné) s uhlom CAB vďaka tomu, že $GB \parallel AC$ a $AB \parallel FC$. Teraz už vidíme, že platí

$$|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle GBA| + |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ACF| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCF|,$$

ako sme mali dokázať.

Ostáva dokázať, že sú zhodné ako strany GB a DC, tak aj strany BE a CF. To je ale jednoduché, lebo $|GB| = |AC| = |DC|$ (prvá rovnosť vyplýva z rovnobežníka $GBCA$, druhá z definície bodu D) a $|BE| = |BA| = |CF|$ (tu prvá rovnosť vyplýva z definície bodu E a druhá z rovnobežníka $ABCF$). Tým je dôkaz zhodnosti trojuholníkov GBE a DCF, ktorý sme sľúbili v úvodnom odseku, ukončený.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

- A1 Prikreslenie tretieho rovnobežníka $CABH$: 1 bod.
- A2 Konštatovanie, že $GHEA$ a $HFAD$ sú rovnoramenné lichobežníky (alebo štvoruholníky so súmerne združenými uhlopriečkami): bez dôkazu 2 body, s dôkazom 4 body.
- B1 Hypotéza $\triangle GBE \cong \triangle DCF$ (ďalej iba „hypotéza“): 0 bodov.
- B2 Zdôvodnené rovnosti $|GB| = |DC|$ a $|GB| = |CF|$ (bez hypotézy): 0 bodov.
- B3 Zdôvodnená zhodnosť uhlov GBE a DCF (bez hypotézy): 0 bodov.
- B4 Hypotéza a zdôvodnené rovnosti $|GB| = |DC|$ a $|GB| = |CF|$: 2 body, z toho 1 bod za jednu rovnosť.
- B5 Hypotéza a zdôvodnená zhodnosť uhlov GBE a DCF: 3 body.

Celkom potom dajte maximálny počet bodov z A1, A2 a zo súčtu bodov z B4 a B5.

---

3 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán. Jeho obvod je druhá mocnina prirodzeného čísla. Tiež vieme, že jedna jeho odvesna má dĺžku rovnú druhej mocnine prvočísla. Určte všetky možné hodnoty tejto dĺžky.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Hľadáme všetky prvočísla p, pre ktoré existuje opísaný trojuholník s dĺžkou jednej odvesny p^2. Dĺžku jeho druhej odvesny označme b a dĺžku prepony c. Potom podľa Pytagorovej vety platí rovnosť $c^2 = p^4 + b^2$, ktorú upravíme na súčinový tvar

$$p^4 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b).$$

Keďže $c > b > 0$ (prepona je dlhšia ako odvesna), stojí na pravej strane tejto rovnosti súčin dvoch prirodzených čísel $c+b$ a $c-b$, pričom $c+b > c-b$. Číslo p^4 z ľavej strany však možno rozložiť na súčin dvoch rôznych prirodzených čísel práve dvoma spôsobmi (keď väčší činiteľ zapíšeme ako prvý): $p^4 \cdot 1$ a $p^3 \cdot p$. Teda súčet $c+b$ je rovný buď p^4, alebo p^3. V prvom prípade je obvod nášho trojuholníka $p^2 + p^4$, v druhom prípade je $p^2 + p^3$.

Podľa zadania je obvod druhou mocninou prirodzeného čísla. Keby taká bola hodnota $p^2 + p^4 = p^2(p^2+1)$, potom vzhľadom na činiteľ p^2 by musel byť druhou mocninou aj o jednotku väčší činiteľ p^2+1, čo je zjavne nemožné – je to číslo o $2p$ menšie ako kvadrát $(p+1)^2$, ktorý po kvadráte p^2 nasleduje.

Musí teda nastať druhý prípad, keď je druhou mocninou hodnota $p^2 + p^3$ čiže $p^2(p+1)$. To nastane práve vtedy, keď bude druhou mocninou činiteľ $p+1$, Z rovnosti $p+1 = k^2$ pre celé k máme $p = (k-1)(k+1)$, odkiaľ vzhľadom na $0 < k-1 < k+1$ vyplýva $k-1 = 1$ a $k+1 = p$, t. j. $k = 2$ a $p = 3$. Potom $c+b = p^3 = 27$ a $c-b = p = 3$, odkiaľ $c = 15$ a $b = 12$.

Trojuholník so stranami dĺžok 15, 12 a 3^2 čiže 9 je naozaj pravouhlý a jeho obvod 36 je druhou mocninou čísla 6.

Dĺžka odvesny rovnej druhej mocnine prvočísla má jedinú možnú hodnotu, a to 9.

Riešenie 2:

Zachovajme označenie p, b, c a stručne opíšme iné, trochu komplikovanejšie riešenie. Tentoraz rovnosť $p^4 + b^2 = c^2$ upravíme na súčinový tvar $b^2 = (c+p^2)(c-p^2)$. Zdôraznime, že tu (nie nutne nesúdeliteľné) čísla $c+p^2$ a $c-p^2$ nemusia byť kvadráty (aj keď ich súčin taký je). Ak však uvážime ich najväčší spoločný deliteľ d, budeme mať $c+p^2 = du^2$ a $c-p^2 = dv^2$ pre nejaké nesúdeliteľné prirodzené čísla u a v, pričom $u > v$. Z toho $b = duv$ a obvod je $du(u+v)$, Teraz z rovností

$$2p^2 = (c+p^2) - (c-p^2) = du^2 - dv^2 = d(u^2 - v^2)$$

vidíme, že d je deliteľ čísla $2p^2$, ktorý je pritom menší ako p^2, lebo $u^2 - v^2 > 2$. Máme tak $d \in \{1, 2, p, 2p\}$. Tieto hodnoty možno jednotlivo posúdiť dosadením do rovnosti $2p^2 = d(u+v)(u-v)$. Z nej potom vždy určíme činitele $u+v$ a $u-v$.

(Pre hodnoty $d = 1$ a $d = 2$ si pritom vypomôžeme poznatkom, že vďaka nesúdeliteľnosti čísel u, v môžu mať čísla $u+v$, $u-v$ jediného spoločného deliteľa väčšieho ako 1, a to číslo 2. Zapíšme to tu iba pre prípad $d = 2p$ (ktorý jediný nevedie k sporu): Vtedy dostaneme $(u+v)(u-v) = p$, takže $u-v = 1$ a $u+v = p$. Z toho dostávame, že obvod nášho trojuholníka je $p^2(p+1)$ a postup dokončíme rovnako ako v prvom riešení.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

- A1 Odvodenie rovnice $p^4 = (c+b)(c-b)$ (v súčinovom tvare!): 1 bod.
- A2 Odvodenie záveru, že $b + c \in \{p^4, p^3\}$: 1 bod.
- A3 Vylúčenie prípadu $b + c = p^4$: 1 bod.
- A4 Odvodenie, že v prípade $b + c = p^3$ platí $p = 3$: 2 body.
- A5 Overenie, že hodnota $p = 3$ (hoci aj uhádnutá) vyhovuje: 1 bod.
- B1 Odvodenie rovnice $b^2 = (c+p^2)(c-p^2)$: 0 bodov.
- B2 Pozorovanie, že najväčší spoločný deliteľ činiteľov $c+p^2$, $c-p^2$ (z rovnice v B1) je deliteľ čísla $2p^2$, t. j. jedna z hodnôt $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$: 1 bod.
- B3 Vylúčenie hodnôt $1, 2, p, p^2, 2p^2$ z bodu B2: 3 body
- B4 Vyriešenie prípadu s hodnotou $2p$ z bodu B2 (vrátane skúšky): 2 body

Celkom potom dajte väčší zo súčtov bodov z A1, A2, A3, A4, A5 a z B2, B3, B4.

Riešenie, ktoré neobsahuje požadovaný záver, že teda jediná možná dĺžka dotyčnej odvesny je 9, môže byť ohodnotené nanajvýš 5 bodmi.

Tvrdenie, že dve po sebe nasledujúce kladné prirodzené čísla nemôžu byť obe druhými mocninami, nemusia riešitelia v riešeniach dokazovať.