MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh školského kola kategórie C

1 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je deliteľný tromi. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke a dokážte, že väčší byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určeným najväčším súčtom.

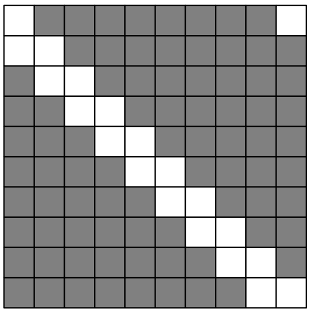
(Michal Rolínek)

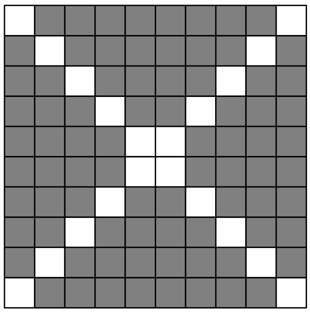
Riešenie:

Uvažujme akúkoľvek tabuľku 10×10 vyplnenú podľa zadania a odhadnime súčty jej čísel v jednotlivých riadkoch, keď vieme, že to sú násobky čísla 3. To isté bude zrejme platiť aj pre súčty čísel v stĺpcoch.

V jednom riadku je desať čísel tvaru ±1, takže pre ich súčet prichádzajú do úvahy hodnoty, ktoré určíme zostupne podľa podľa počtu zastúpených plus jednotiek: 10 (desať jednotiek), 8 (deväť jednotiek), 6 (osem jednotiek) a tak ďalej. Vidíme, že deliteľná tromi je až tretia najväčšia hodnota 6. Súčet čísel v ľubovoľnom riadku je preto nanajvýš 6. Z toho vyplýva, že súčet všetkých čísel v tabuľke (ktorá má 10 riadkov) neprevyšuje hodnotu $10 \cdot 6$ čiže 60. Ak uvedieme príklad správne vyplnenej tabuľky so súčtom čísel rovným 60, bude to naozaj jeho najväčšia možná hodnota a úloha bude vyriešená.

Nájsť požadovaný príklad nám pomôže poznatok z predchádzajúceho odseku, podľa ktorého tabuľku máme vlastne vyplniť tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve osem jednotiek. Môžeme to spraviť mnohými spôsobmi. Dva z nich (vykazujúce určitú pravidelnosť) sú uvedené na obrázkoch, v ktorých sú všetky políčka s číslami 1 vyfarbené (takže biele zostali políčka s číslami -1).





Poznámka:

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

- A1 Pozorovanie, že v jednom riadku (alebo stĺpci) je súčet čísel nanajvýš 6 (alebo ekvivalentne, že je v ňom nanajvýš 8 jednotiek): 2 body.
- A2 Dôkaz toho, že súčet čísel v tabuľke je nanajvýš 60: 3 body.
- B1 Sformulovanie úlohy nájsť tabuľku, ktorá má v každom riadku aj stĺpci 8 jednotiek: 1 bod.
- B2 Uvedenie tabuľky so súčtom čísel 60 (alebo jej kompletný opis): 3 body.
- C Uhádnutie odpovede: 0 bodov.

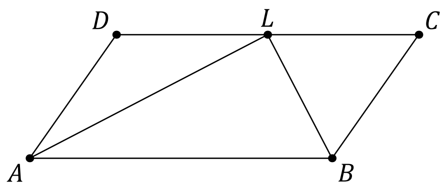
Celkovo potom dajte maximum zo súčtu bodov z A1 a A2 a súčtu bodov z B1 a B2.

2 V rovnobežníku $ABCD$ platí, že os uhla ABC prechádza stredom L strany CD. Dokážte, že priamky AL a BL sú navzájom kolmé.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Podľa zadania leží bod L na osi uhla ABC, takže $|\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Podľa vety o striedavých uhloch platí tiež $|\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CLB|$. Dokopy dostávame $|\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CLB|$, takže trojuholník CLB je rovnoramenný so základňou LB, t. j.. $|\sphericalangle BC| = |\sphericalangle LC|$.



Keďže v rovnobežníku $ABCD$ platí $|AD| = |BC|$ a bod L je stred strany CD, dokazovanú rovnosť $|BC| = |LC|$ možno ekvivalentne prepísať na $|AD| = |LD|$. Trojuholník ALD je teda rovnoramenný so základňou AL, a preto $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DLA|$. Uhol DLA je však zhodný so striedavým uhlom BAL, teda $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle BAL|$. To znamená, že bod L leží nielen na osi uhla ABC, ale aj na osi uhla BAD. Tým pádom platí

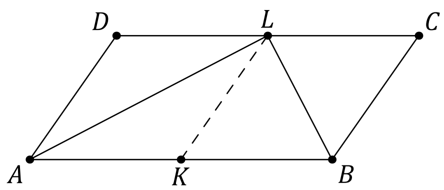
$$|\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle LBA| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle BAD| + \frac{1}{2}\,|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}\left(|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC|\right) = 90°,$$

pričom sme využili to, že vďaka $BC \parallel AD$ platí $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180°$.

Došli sme k záveru, že v trojuholníku ABL je súčet vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B rovný 90°, takže pri treťom vrchole L je uhol pravý, ako sme mali dokázať.

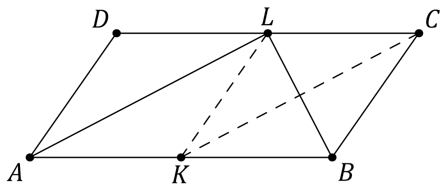
Riešenie 2:

Označme K stred strany AB. Keďže štvoruholník $KBCL$ je rovnobežník (lebo protiľahlé strany KB a LC sú zhodné a rovnobežné), platí v ňom $|KL| = |BC|$. Ak preto rovnako ako v prvom riešení dokážeme rovnosti $|BC| = |CL| = \frac{1}{2}\,|CD| = |KA| = |KB|$, budeme dokopy mať $|KL| = |KA| = |KB|$. Z toho už vďaka Tálesovej vete dostávame, že ABL je pravouhlý trojuholník s preponou AB



Poznámka:

Z rovností uvedených v druhom riešení vyplýva, že rovnobežník $KBCL$ je kosoštvorec (prípadne štvorec), a preto platí $KC \perp BL$. Po tomto zistení možno riešenie dokončiť takto: Keďže aj $AKCL$ je zrejme rovnobežník (z rovnakého dôvodu ako $KBCL$), platí v ňom $AL \parallel KC$, odkiaľ už vďaka $KC \perp BL$ máme $AL \perp BL$.



Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

- A1 Dôkaz rovnosti $|BC| = |LC|$: 2 body.
- A2 Dôkaz rovnosti $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle BAL|$: 2 body.
- B Zavedenie stredu K strany AB: 0 bodov.
- C Pozorovanie, že $KBCL$ je rovnobežník: 1 bod.
- D Dôkaz zhodnosti úsečky KL s úsečkami KA, KB: 5 bodov.
- E1 Dôkaz $KC \perp BL$: 4 body
- E2 Pozorovanie, že $AKCL$ je rovnobežník: 1 bod

Celkovo potom dajte maximum bodov zo súčtu z A1 a A2, bodov z C, bodov z D a bodov zo súčtu z E1 a z E2.

---

3 Nájdite všetky štvorice a, b, c, d celých čísel so súčtom 71, pre ktoré platí $a > b > c > d$ a ktoré spĺňajú rovnicu

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = 26.$$

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Ľavú stranu zadanej rovnice roznásobíme a upravíme:

$$(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=(ac-bc-ad+bd)+(ab-bd-ac+cd)=$$
$$=-bc-ad+ab+cd=(a-c)(b-d).$$

Máme teda rovnicu $(a-c)(b-d)=26=2\cdot 13$. Z podmienky $a>b>c$ vyplýva, že $a-c\geq 2$. Podobne z $b>c>d$ vyplýva $b-d\geq 2$. Tým pádom v rovnici $(a-c)(b-d)=2\cdot 13$ sa činitele $a-c$, $b-d$ rovnajú číslam 2 a 13 v niektorom poradí (lebo 13 je prvočíslo). Tieto dve možnosti teraz rozoberieme:

- Nech $a-c=2$ a $b-d=13$.

  Potom platí $a=c+2$ a $d=b-13$. Podmienka $a>b>c$ tak prejde na tvar $c+2>b>c$. Keďže však medzi celými číslami $c+2$ a c leží jediné ďalšie celé číslo $c+1$, platí $b=c+1$, odkiaľ $d=b-13=c-12$. Naša štvorica (a,b,c,d) má teda tvar $(c+2,c+1,c,c-12)$. Z podmienky $a+b+c+d=71$ potom vyplýva $4c-9=71$ čiže $c=20$, a preto $(a,b,c,d)=(22,21,20,8)$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že táto štvorica vyhovuje zadaniu.

- Nech $b-d=2$ a $a-c=13$.

  Podobne ako v prvom prípade vďaka $b=d+2$ prejde podmienka $b>c>d$ na tvar $d+2>c>d$, podľa ktorého $c=d+1$, a teda $a=c+13=d+14$. Naša štvorica $(d+14,d+2,d+1,d)$ po dosadení do rovnosti $a+b+c+d=71$ dáva $4d+17=71$, odkiaľ $d=27/2$, čo však nie je celé číslo. Tento prípad je tak vylúčený.

Zadaniu úlohy vyhovuje jediná štvorica (a,b,c,d), a to $(22,21,20,8)$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte čiastkové kroky nasledovne.

A Rozklad ľavej strany rovnice na súčin $(a-c)(b-d)$, prípadne $(c-a)(d-b)$: 2 body.

B1 Vylúčenie prípadov, keď $\{a-c,b-d\}=\{1,26\}$: 1 bod

B2 Vyriešenie jedného či oboch prípadov, keď $\{a-c,b-d\}=\{2,13\}$: 1 prípad 2 body, 2 prípady 3 body.

B3 Pozorovanie, že pre celé čísla x, y, z vyplýva zo vzťahov $x>y>z$ a $x-z=2$ rovnosť $y=z+1$: 1 bod.

B4 Uhádnutie odpovede: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet počtu bodov z A a maxima z B1, B2, B3 a B4.