

### 63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

#### Katégoria A

Krajské kolo – riešenie úloh

#### 1) Odraz od šikmej steny

Riešenie:

Zložky rýchlosti šikmého vrhu

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$

a súradnice trajektórie

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

a) Pre bod dopadu guľôčky v bode P máme  $y_P = 0$ ,  $x_P = d$ .

$$d = v_{01} t_P \cos \alpha \quad \text{a} \quad 0 = v_{01} t_P \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_P^2.$$

Po vyjadrení času  $t_D$  a dosadení do vzťahu pre vzdialenosť  $d$  dostávame

$$t_P = \frac{2v_{01}}{g} \sin \alpha \quad d = \frac{2v_{01}^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_{01}^2}{g} \sin 2\alpha,$$

odkiaľ

$$v_{01} = \sqrt{\frac{d g}{\sin 2\alpha}}.$$

Pre dané hodnoty:  $v_{01} \approx 7,99 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pre  $\alpha_1$  a  $v_{01} \approx 9,96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pre  $\alpha_2$ .

b) Na obr. RA-1 je naznačená situácia s vodorovným odrazom. Aby mohol nastať vodorovný odraz, musí guľôčka dopadnúť do bodu A na šikmej ploche na zostupnej časti trajektórie, tzn. vektor rýchlosti  $\mathbf{v}_A$  zvierá s vodorovným smerom záporný uhol  $-2\gamma$ . Odraz je zrkadlový (dokonale pružný), tzn. uhol dopadu  $\gamma$  je rovný uhlu odrazu, a platí  $2\gamma = \pi - 2\beta$ . Pritom platí  $\tan(-2\gamma) = \tan(2\beta - \pi) = \tan 2\beta < 0$ .

Ak  $\beta > 0$  je táto podmienka splnená pre  $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$ , resp.  $45^\circ < \beta < 90^\circ$ .

Pre uhol vektora rýchlosti  $\mathbf{v}_A$  platí

$$\tan(-2\gamma) = \tan 2\beta = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{v_{02} \sin \alpha - g t_A}{v_{02} \cos \alpha}.$$

Odtiaľ vyjadríme čas letu

$$t_A = \frac{v_{02}}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha \tan 2\beta).$$

Podmienka odrazu od šikmej plochy je  $y_A > 0$   
a po dosadení do

$$y_A = v_{02} t_A \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_A^2$$

a po dosadení

$$y_A = \frac{v_{02}^2 \cos^2 \alpha}{2g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 2\beta).$$

Podmienka je  $(\tan^2 \alpha - \tan^2 2\beta) = (\tan \alpha - \tan 2\beta)(\tan \alpha + \tan 2\beta) > 0$ .

Keďže  $\tan 2\beta < 0$ , a teda  $\tan \alpha - \tan 2\beta > 0$ , musí platiť  $\tan \alpha + \tan 2\beta > 0$ , preto

$$\tan \alpha > -\tan 2\beta = \tan(\pi - 2\beta),$$

a odtiaľ pre uhol  $\alpha$  máme

$$\alpha > \pi - 2\beta.$$

Pre súradnice bodu A na šikmej stene platí

$$x_A = d + \frac{y_A}{\tan \beta} = d + \frac{v_{02}^2 \cos^2 \alpha}{2g \tan \beta} (\tan^2 \alpha - \tan^2 2\beta)$$

a zároveň

$$x_A = v_{02} t_A \cos \alpha = \frac{v_{02}^2}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha \tan 2\beta) \cos \alpha.$$

Z porovnania oboch výrazov vyjadríme začiatočnú rýchlosť vrhu

$$v_{02} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{2gd \tan \beta}{(\tan \alpha - \tan 2\beta)(2 \tan \beta - \tan 2\beta - \tan \alpha)}}.$$

Výraz pod odmocninou musí byť kladný. Keďže  $\tan 2\beta < 0$ , a teda  $\tan \alpha - \tan 2\beta > 0$ , je podmienka pre uhol vrhu

$$\tan \alpha < 2 \tan \beta - \tan 2\beta, \text{ resp. } \alpha < \alpha_m = \arctan(2 \tan \beta - \tan 2\beta).$$

Výsledná podmienka pre uhol vrhu je

$$\pi - 2\beta < \alpha < \arctan(2 \tan \beta - \tan 2\beta).$$

Pre dané hodnoty je splnená podmienka pre uhol  $\beta = 60^\circ > 45^\circ$ .

Pre uhol  $\alpha$  je podmienka  $60^\circ < \alpha < 79,1^\circ$ . Podmienka je splnená iba pre uhol  $\alpha_2 = 70^\circ$ .

Pre uhol  $\alpha_1 = 45^\circ$  vodorovný odraz nenastane, pre uhol  $\alpha_2$  je  $v_{02} \approx 13,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- c) Po odraze sa guľôčka pohybuje z bodu A po trajektórii vodorovného vrhu.

Rýchlosť dopadu guľky do bodu A je

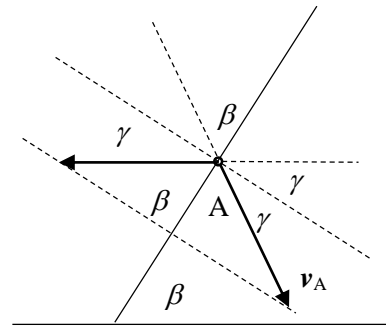
$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = \sqrt{v_{02}^2 \cos^2 \alpha + (v_{02} \sin \alpha - g t_A)^2}.$$

Po dosadení za čas  $t_A$  a úprave máme

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = v_{02} \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 2\beta}.$$

Táto rýchlosť po odraze zodpovedá začiatočnej rýchlosti vodorovného vrhu.

Pre súradnice bodu D dopadu platí



Obr. RA-1

$$x_D = x_A - v_A t_D, \quad y_D = 0 = y_A - \frac{1}{2} g t_D^2,$$

kde  $t_D = \sqrt{\frac{2y_A}{g}}$  je doba pohybu guľôčky od odrazu v bode A do dopadu v bode D.

Po dosadení za  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $v_A$  a  $v_{02}$  dostávame

$$x_D = d \frac{1 - \sqrt{(1 + \tan^2 2\beta) \frac{\tan \alpha + \tan 2\beta}{\tan \alpha - \tan 2\beta}}}{1 - \frac{\tan 2\beta + \tan \alpha}{2 \tan \beta}}.$$

Pre dané hodnoty a uhol  $\alpha_2$  máme  $x_D \approx 43,9$  cm.

Pre dopad do bodu O je dané  $x_D = 0$ . Z podmienky nulového čitateľa dostávame po úprave

$$\tan \alpha = - \left( 1 + \frac{2}{\tan^2 2\beta} \right) \tan 2\beta.$$

Pre dané hodnoty  $\alpha_0 \approx 70,9^\circ$ .

## 2) Najväčšia účinnosť

*Riešenie:*

a) Objem v stave 1 určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}, \text{ pre dané hodnoty } V_1 = 2,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 24,9 \text{ L.}$$

Veličiny v stave 2 určíme pomocou stavovej rovnice adiabatického deja.

$$V_2 = V_1 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad p_2 = p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \text{ pre dané hodnoty } V_2 = 4,4 \text{ L}, p_2 = 2,26 \text{ MPa.}$$

Poissonova konštanta dvojatómového plynu  $\kappa = \frac{s+2}{s} = 1,4$ .

Objem v stave 4 určíme z rovnice pre izobarický dej 4-1

$$V_4 = V_1 \frac{T_2}{T_1}, \text{ pre dané hodnoty } V_4 = 49,8 \text{ L.}$$

b) Účinnosť termodynamického kruhového deja  $\eta = W/Q$ , kde  $W$  je celková práca vykonaná počas cyklu,  $Q$  je celkové dodané teplo sústave.

Prvý cyklus:

Práca vykonaná plynom pri adiabatickom deji a pri izotermickom deji

$$W_{12} = -\Delta U_{12} + Q_{12} = -C_V (T_2 - T_1) = -\frac{s}{2} nR (T_2 - T_1),$$

keďže pri adiabatickom deji  $Q_{12} = 0$ .  $C_V = (s/2) nR$ , kde  $s = 5$  pre dvojatómové molekuly.

$$W_{23} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_2} \right) = nRT_2 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = \frac{nRT_2}{\kappa-1} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Teplo sa plynu dodáva iba pri izotermickej kompresii a je rovné vykonanej práci (zmena vnútornej energie je nulová)

$$Q_{23} = W_{23}.$$

Účinnosť

$$\eta_1 = \frac{W_{12} + W_{23}}{W_{23}} = 1 - \frac{\frac{s}{2} nR(T_2 - T_1)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} = 1 - \frac{\frac{s}{2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} = 1 - \frac{\frac{s}{2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}{\frac{1}{\kappa - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}.$$

Pre dané hodnoty  $\eta_1 \approx 27,9\%$ .

Druhý cyklus:

Práca  $W_{12}$  je rovnaká.

$$W_{24} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_2}\right) \text{ a } W_{41} = p_1(V_1 - V_4).$$

Dodané teplo  $Q = W_{24}$ . Vo zvyšných častiach cyklu plyn teplo odovzdáva.

$$\eta_2 = \frac{W_{12} + W_{24} + W_{41}}{Q} = 1 - \frac{\frac{s}{2} nR(T_2 - T_1) + p_1(V_4 - V_1)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_1} \frac{V_1}{V_2}\right)} = 1 - \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right) \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}.$$

Pre dané hodnoty  $\eta_2 \approx 27,9\%$ .

Z výsledkov je zrejmé, že v oboch prípadoch je účinnosť rovnaká.

### 3) Obraz LED

- a) Pre zobrazenie predmetu je dôležité poznať ohniská šošovky.

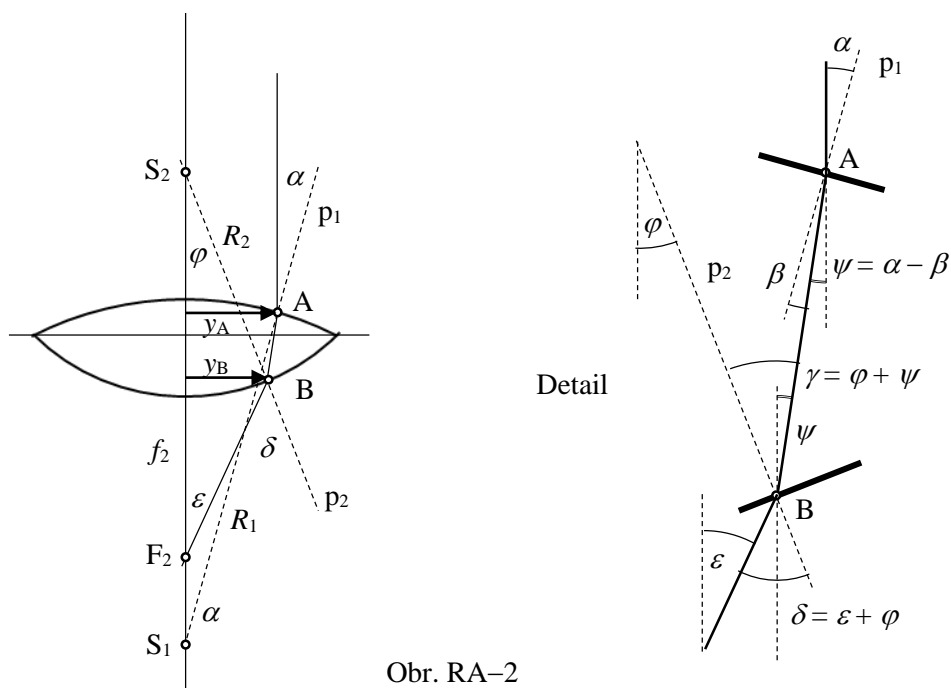
Odlíšnosť od bežnej situácie je v tom, že v predmetovom priestore je vzduch, ale v obrazovom kvapalina (voda) s iným indexom lomu. Obrazové ohnisko nájdeme tak, že na šošovku necháme dopadať lúč rovnobežný s optickou osou a sledujeme jeho prechod cez šošovku, pričom optickú os pretína v ohnisku, obr. RA-2.

V bode A je normála  $p_1$  k povrchu šošovky spojnicou stredu  $S_1$  guľovej plochy a bodu A. Uhol dopadu je  $\alpha$  a uhol lomu  $\beta$ , pričom pre malé uhly platí

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}.$$

Lúč AB dopadá na druhú povrchovú plochu v bode B pod uhlom  $\gamma$  vzhľadom na normálu  $p_2$  danú spojnicou  $S_2B$  a láme sa pod uhlom  $\delta$  do ohniska  $F_1$ , pričom pre malé uhly platí

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} \approx \frac{\gamma}{\delta}.$$



Obr. RA-2

Ak označíme  $\varphi$  uhol medzi priamkou  $p_2$  a optickou osou, platia ďalej vzťahy, obr. RA-xx detail,

$$\gamma = \varphi + \psi = \varphi + \alpha - \beta \quad \text{a} \quad \delta = \varphi + \varepsilon.$$

Ak uvažujeme tenkú šošovku, líšia sa vzdialenosti  $y_A$  a  $y_B$  bodov A a B od osi iba nepatrne, a približne platí  $y_A \approx y_B$ . Potom môžeme použiť vzťahy

$$R_1 \sin \alpha \approx R_2 \sin \varphi \approx f_2 \tan \varepsilon, \quad \text{a pre malé uhly} \quad R_1 \alpha \approx R_2 \varphi \approx f_2 \varepsilon.$$

Z uvedených vzťahov postupne dostaneme

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{R_1} \varepsilon = \frac{1}{R_1} \frac{\delta - \varphi}{\alpha} = \left( \frac{n_2}{n_3} - 1 \right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \left( \frac{n_2}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} \right),$$

a po úprave

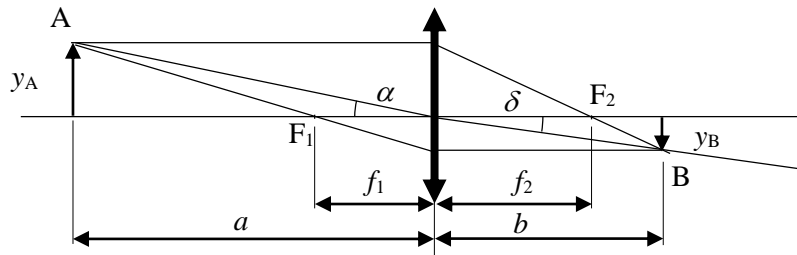
$$\frac{n_3}{f_2} = \frac{n_1}{R_1} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) + \frac{n_3}{R_2} \left( \frac{n_2}{n_3} - 1 \right), \quad \text{resp.} \quad f_2 = \frac{n_3 R_1 R_2}{R_2 (n_2 - n_1) + R_1 (n_2 - n_3)}.$$

Ak necháme dopadať lúč rovnobežný s optickou osou v opačnom smere, tzn. z prostredia s indexom lomu  $n_3$ , na povrchovú plochu šošovky s polomerom  $R_2$ , lúč po prechode šošovkou pretne optickú os v ohnisku  $F_1$ . Pre určenie ohniskovej vzdialenosti  $f_1$  použijeme odvodený vzťah s tým, že vzájomne vymeníme  $n_1$  a  $n_3$ , a taktiež  $R_1$  a  $R_2$ .

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1}{R_1} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) + \frac{n_3}{R_2} \left( \frac{n_2}{n_3} - 1 \right), \quad \text{resp.} \quad f_1 = \frac{n_1 R_1 R_2}{R_2 (n_2 - n_1) + R_1 (n_2 - n_3)}.$$

Platí teda  $\frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_3}$ .

b) Obr. RA-3



Obr. RA-3

Lúč prechádzajúci stredom šošovky neprechádza priamo, ale láme sa, lebo sa líšia indexy lomu predmetového prostredia ( $n_1$ ) a obrazového prostredia ( $n_3$ ). Pre označenie uhlov podľa obr. RA-3

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{n_3}{n_1}.$$

Pre predmet a jeho obraz platí

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a \tan \alpha}{b \tan \delta} \approx \frac{a \sin \alpha}{b \sin \delta} = \frac{a n_3}{b n_1} = \frac{f_2}{b - f_2},$$

odkiaľ dostávame zobrazovaciu rovnicu

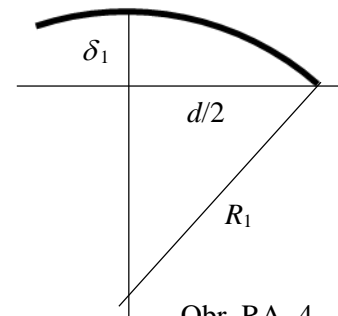
$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3}{f_2}, \text{ resp. } \frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1.$$

c) Najprv určíme polomer  $R_1$  z daných rozmerov, obr. RA-4.

$$\delta_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - (d/2)^2},$$

odkiaľ

$$R_1 = \frac{d^2 + 4\delta_1^2}{8\delta_1}.$$



Obr. RA-4

Pre určenie  $R_2$  použijeme zobrazovaciu rovnicu.

Pre  $a = h$  a  $b = H$  máme

$$R_2 = \frac{(n_2 - n_3)}{\frac{n_1}{h} + \frac{n_3}{H} - \frac{1}{R_1} (n_2 - n_1)} = \frac{n_2 - n_3}{\frac{n_1}{h} + \frac{n_3}{H} - (n_2 - n_1) \frac{8\delta_1}{d^2 + 4\delta_1^2}}.$$

Pre dané hodnoty:  $R_1 \approx 12,4$  mm,  $R_2 \approx 9,17$  mm,  $f_1 \approx 20,3$  mm,  $f_2 \approx 27,0$  mm.

#### 4) Indukčná cievka

Riešenie:

- a) Pre obvod platí rovnica

$$\mathbf{U}_Z = R_s \mathbf{I} + R \mathbf{I} + j\omega L \mathbf{I}.$$

Napätie na cievke

$$\mathbf{U}_C = R \mathbf{I} + j\omega L \mathbf{I}.$$

Tučne označené veličiny sú fázory príslušných veličín (komplexné efektívne hodnoty).

Pre efektívne hodnoty udávané meracími prístrojmi máme

$$U_Z = \sqrt{(R_s + R)^2 + (\omega L)^2} I, \text{ resp. } \frac{U_Z^2}{I^2} = (R_s + R)^2 + (\omega L)^2,$$

$$U_C = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I, \text{ resp. } \frac{U_C^2}{I^2} = R^2 + (\omega L)^2.$$

Z týchto rovníc určíme parametre cievky

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{U_C^2}{I^2} - \left( \frac{U_Z^2 - U_C^2 - R_s^2 I^2}{2R_s I^2} \right)^2},$$

$$R = \frac{U_Z^2 - U_C^2 - R_s^2 I^2}{2R_s I^2}.$$

Pre dané hodnoty  $L \approx 16,1$  mH,  $R \approx 4,99$   $\Omega$ .

- b) Tepelný výkon cievky

$$P_C = R I^2 = \frac{U_Z^2 - U_C^2 - R_s^2 I^2}{2R_s}.$$

Pre dané hodnoty  $P_C \approx 49,9$  mW.

- c) Rozdiel fáz určíme z pomeru fázorov napätí  $\mathbf{U}_Z$  a  $\mathbf{U}_C$

$$\frac{\mathbf{U}_Z}{\mathbf{U}_C} = \frac{R_s + R + j\omega L}{R + j\omega L} = 1 + \frac{R_s R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\omega L \frac{R_s}{R^2 + (\omega L)^2},$$

odkiaľ

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R_s + R} - \arctan \frac{\omega L}{R}, \text{ alebo } \varphi = -\arctan \frac{\omega L R_s}{R_s R + R^2 + (\omega L)^2}.$$

Pre dané hodnoty  $\varphi \approx -0,523$  rad =  $-30,0^\circ$ .

Napätie na zdroji sa oneskoruje za napätím na cievke.

---

#### 63. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie A

Autori návrhov úloh:

Lubomír Konrád 1-3, Ivo Čáp 4

Recenzia:

Aba Teleki, Lubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka:

Aba Teleki

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021