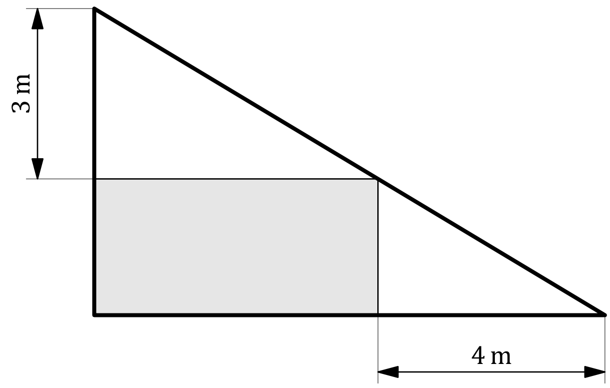
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

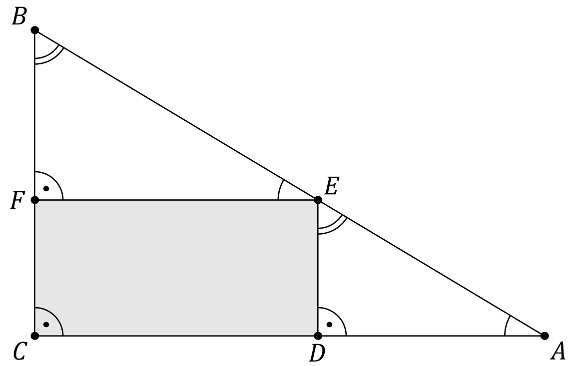
1 Záhradný architekt navrhol záhon, ktorého náčrt s dvomi požadovanými rozmermi vidíte na obrázku. Celý záhon má mať tvar pravouhlého trojuholníka, v sivej obdĺžnikovej časti majú byť zasadené tulipány, v dvoch zvyšných trojuholníkových častiach budú narcisy. Vypočítajte obsah tulipánovej časti.



(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

Z rovnobežnosti protiľahlých strán obdĺžnika $CDEF$ vyplýva, že uhly DAE a FEB sú navzájom zhodné, rovnako ako aj uhly EBF a AED.



Trojuholníky ADE a EFB sú teda podobné, a pre dĺžky zodpovedajúcich si strán preto platí

$$|DE| : |FB| = |AD| : |EF|.$$

Po úprave dostávame

$$|DE| \cdot |EF| = |AD| \cdot |FB|,$$

takže

$$\mathrm{S}(CDEF) = |DE| \cdot |EF| = |AD| \cdot |FB| = 4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}^2.$$

Aby však riešenie bolo úplné, treba ukázať, že situácia zo zadania naozaj môže nastať. Ľahko vidieť, že stačí zvoliť napríklad $|CD| = 6$ m a $|CF| = 2$ m.

Hľadaný obsah tulipánového obdĺžnika je teda 12 m^2.

Riešenie 2:

Všetky dĺžky budeme uvádzať v metroch.

Trojuholník ABC je zložený z trojuholníkov ADE, EFB a obdĺžnika $CDEF$. Ak označíme neznáme dĺžky strán CD a CF obdĺžnika $CDEF$ postupne (v metroch) a a b, tak platí:

$$\mathrm{S}(ABC) = \mathrm{S}(ADE) + \mathrm{S}(EFB) + \mathrm{S}(CDEF),$$

$$\frac{(a+4)(b+3)}{2} = \frac{4b}{2} + \frac{3a}{2} + ab,$$

$$ab + 4b + 3a + 12 = 4b + 3a + 2ab,$$
$$ab = 12.$$

Situácia zo zadania nazoaj môže nastať, a to napríklad v prípade $a = 6$ a $b = 2$.

Obsah tulipánového obdĺžnika je teda 12 m^2.

Poznámka:

Pri riešení možno využiť aj skutočnosť, že $|AB| = |AE| + |EB|$, a každá z úsečiek AB, AE a EB je preponou jedného z pravouhlých trojuholníkov znázornených na obrázku. Podľa Pytagorovej vety potom

$$\sqrt{(a+4)^2 + (b+3)^2} = \sqrt{b^2 + 16} + \sqrt{a^2 + 9},$$

Z tejto rovnosti je tiež možné vyvodiť hodnotu súčinu ab. Tento postup je však značne komplikovaný a zahŕňa opakované umocňovanie a ďalšie náročnejšie úpravy.

Hodnotenie:

- 3 body za rozbor a relevantné postrehy;
- 1 bod za výsledok;
- 2 body za úplný popis postupu riešenia.

---

2 Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel, ktorých súčet je väčší ako ich súčin.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Hľadáme kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí $a + b > ab$.

Ak $a = 1$, tak táto nerovnica má tvar $1 + b > b$, čo platí pre každé kladné celé číslo b.

Nech teraz $a \geq 2$, t. j. $a - 2 \geq 0$. Našu nerovnicu potom môžeme upravovať takto:

$$ab - b < a,$$
$$(a-1)b < a.$$
$$b < \frac{a}{a-1} \leq \frac{a + (a-2)}{a-1} = \frac{2(a-1)}{a-1} = 2.$$

Keďže b je kladné číslo, dostávame $b = 1$. V takom prípade má nerovnica $a + b > ab$ tvar $a + 1 > a$, čo platí pre každé kladné celé číslo a.

Zhrnutím dostávame, že podmienky úlohy spĺňajú práve všetky dvojice celých kladných čísel, z ktorých aspoň jedno je rovné 1.

Riešenie 2:

Hľadáme kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí $a+b > ab$. Táto nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou $\frac{a+b}{ab} > 1$, z čoho po ďalšej ekvivalentnej úprave dostávame

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} > 1.$$

Ak je aspoň jedno z čísel a, b rovné 1, tak je na ľavej strane súčet väčší ako 1, a nerovnosť teda platí.

V opačnom prípade, t. j. keď sú obe čísla a, b aspoň 2, je na ľavej strane súčet nanajvýš $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ čiže 1, nerovnosť teda splnená nie je.

Riešenie 3:

Hľadáme kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí $a+b > ab$. Túto nerovnosť $a+b > ab$ môžeme postupne upraviť ekvivalentne takto:

$$0 > ab - a - b,$$
$$1 > ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1),$$
$$1 > (a-1)(b-1).$$

Ak je aspoň jedno z čísel a, b rovné 1, tak je na pravej strane 0 a nerovnosť teda platí.

V opačnom prípade, t. j. keď sú obe čísla a, b aspoň 2, je na pravej strane číslo aspoň $(2-1)(2-1)$ čiže 1, a nerovnosť teda splnená nie je.

Hodnotenie:

- 3 body za určenie vyhovujúcich dvojíc,
- 3 body za odôvodnenie, že iné dvojice nevyhovujú.

Čiastkové výsledky bez zovšeobecnenia ohodnoťte maximálne 2 bodmi.

---

3 Betka napísala tridsať po sebe idúcich celých čísel a všetky tieto čísla sčítala. Potom vygumovala druhé, piate, ôsme a každé ďalšie tretie číslo. Všetky čísla, ktoré jej po gumovaní ostali, opäť sčítala. Zistila, že nový súčet je o 265 menší ako ten pôvodný. Napíšte číslo, ktoré Betka vygumovala ako prvé.

(Erika Novotná)

Riešenie:

Pôvodných 30 Betkiných čísel môžeme zapísať takto:

$$a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, \ldots, a+27, a+28, a+29.$$

Betka vygumovala druhé a potom každé tretie číslo, takže vygumovala čísla

$$a+1, a+4, a+7, a+10, a+13, a+16, a+19, a+22, a+25, a+28.$$

Súčet týchto čísel je $10a + 145$, čo zodpovedá rozdielu 265. Preto $10a = 265 - 145 = 120$, teda $a = 12$.

Prvé číslo, ktoré Betka vygumovala, bolo číslo $a + 1$ čiže 13.

Hodnotenie:

- 3 body za rozbor a a čiastkové pomocné výpočty;
- 3 body za správny výsledok s úplným zdôvodnením.

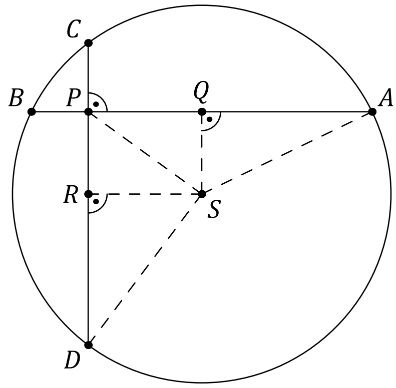
---

4 V kružnici s priemerom 10 cm sme vyznačili dve navzájom kolmé tetivy AB a CD. Dĺžka tetivy AB je 9 cm, dĺžka tetivy CD je 8 cm. Vypočítajte vzdialenosť priesečníka priamok AB a CD od stredu kružnice.

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Označme stred kružnice S, priesečník tetív P, päty kolmíc z bodu S na AB a CD postupne Q a R:



Hľadaná vzdialenosť je dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka SQP, resp. SRP. Odvesny týchto trojuholníkov sa zhodujú s odvesnami pravouhlých trojuholníkov AQS a DRS. Pre zistenie potrebných vzdialeností opakovane použijeme Pytagorovu vetu:

- V trojuholníku AQS je strana AQ polovicou tetivy AB a strana SA je polomerom kružnice, teda

$$|SQ|^2 = (5\,\text{cm})^2 - \left(\frac{9\,\text{cm}}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}\,\text{cm}^2.$$

- V trojuholníku DRS je strana DR polovicou tetivy CD a strana SD je polomerom kružnice, teda

$$|SR|^2 = (5\,\text{cm})^2 - (4\,\text{cm})^2 = 9\,\text{cm}^2.$$

V trojuholníku SQP teraz poznáme druhé mocniny dĺžok obidvoch jeho odvesien (lebo $|QP| = |SR|$), teda

$$|PS|^2 = |SQ|^2 + |QP|^2 = \frac{19}{4}\,\text{cm}^2 + 9\,\text{cm}^2 = \frac{55}{4}\,\text{cm}^2,$$

z čoho

$$|PS| = \frac{\sqrt{55}}{2}\ \text{cm}.$$

Vzdialenosť priesečníka priamok AB a CD od stredu kružnice je teda $\frac{\sqrt{55}}{2}$ cm, čo je približne 3,71 cm.

Hodnotenie:

- 3 body za rozbor a a čiastkové pomocné výpočty;
- 3 body za správny výsledok s úplným zdôvodnením.