

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

---

- 1 Egy papírra egymás mellé 71 nullától különböző valós szám van leírva. Fennáll, hogy az első és az utolsó szám kivételével minden szám a szomszédos számok szorzatától 1-gyel kisebb. Bizonyítsd be, hogy az első és az utolsó szám egyenlők!
- 2 Egy  $d$  természetes számot *igazságosnak* hívunk, ha azon 2021-számjegyű palindromok száma, amelyek  $d$  többszörösei, ugyanannyi, mint a 2022-számjegyű palindromok száma, amelyek  $d$  többszörösei. Döntsd el, hogy a  $\{1, 2, \dots, 35\}$  halmazban igazságos számból van-e több, vagy azokból, amelyek nem igazságosak!  
(Palindromnak azt a természetes számot hívjuk, amelynek tízes számrendszerbeli alakja balról jobbra olvasva ugyanaz, mint jobbról balra olvasva.)
- 3 Egy hegyesszögű, különböző oldalú  $ABC$  háromszögben legyen  $M$  a  $BC$  oldal középpontja,  $N$  pedig a körülírt körön fekvő  $BAC$  körív középpontja. Továbbá, jelölje  $l$  a  $BC$  átmérőjű kört,  $D$  és  $E$  az  $l$  körvonal metszéspontjait a  $BAC$  szög tengelyével. Az  $F$  és  $G$  pontok az  $l$  körvonalra illeszkednek úgy, hogy a  $DEFG$  négyszög téglalap (esetleg négyzet). Bizonyítsd be, hogy az  $F$ ,  $G$ ,  $M$ ,  $N$  pontok egy körvonalra illeszkednek!

---

1. část celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **pondelok 21. marca 2022** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovoľené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

---

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže

---

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

---

4 Egy  $ABCD$  konvex négyszögben  $|AB| = |BC| = |CD|$ . Jelölje  $P$  az átlóinak a metszéspontját, valamint  $O$ , ill.  $Q$  az  $APB$ , ill.  $DPC$  háromszögek köré írt körök középpontját! Bizonyítsd be, hogy az  $OBCQ$  négyszög parallelogramma!

5 Keresd meg az összes olyan  $n$  egész számot, amelyre a

$$2^n + n^2$$

szám négyzetszám!

6 A Mars kolonizálására tett kísérletkor az emberiség 50 műholdat küldött a Naprendszerbe, amelyek között 225 kommunikációs kapcsolatot létesítettek (minden kapcsolat két műhold között létezik és semmelyik két műhold között sincs több, mint egy kapcsolat). Azt mondjuk, hogy három műhold *összekötött*, ha legalább az egyiknek közülük van kommunikációs kapcsolata a másik kettővel. Határozd meg az összekötött műholdhármakosok lehető legkisebb és legnagyobb számát!

---

2. část celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 22. marca 2022** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

---

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže

---