

63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Katégória A

Celoštátne kolo – riešenie úloh

1) Šikmý vrh 3

Riešenie:

- a) Pre súradnice a zložky rýchlosti šikmého vrhu vzhľadom na bod O platí

$$x = v_0 t \cos \alpha \qquad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha \qquad v_y = v_0 \sin \alpha - g t.$$

Pre dopad do bodu P na dolnom konci vodorovnej plochy máme $y_P = 0$, tzn.

$$x_P = v_0 t_P \cos \alpha \qquad 0 = v_0 t_P \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_P^2,$$

odkiaľ máme

$$t_P = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \quad \text{a} \quad x_P = d = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Podmienka dopadu do bodu D na šikmej ploche je $x_D > d$, odkiaľ máme

$$v_0 > \sqrt{\frac{g d}{\sin 2\alpha}} = v_{0\min}.$$

Pre dané hodnoty: $v_{0\min 1} \approx 7,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pre uhol α_1 a $v_{0\min 2} \approx 7,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pre uhol α_2 .

- b) Prvý spôsob vyžaduje dopad guľôčky kolmo na šikmú plochu. Bod dopadu na šikmú plochu označíme D_k . Guľôčka má po pružnom odraze rýchlosť rovnú rýchlosti dopadu a opačný smer. Preto trajektória po odraze kopíruje trajektóriu pred dopadom.

Druhý spôsob spočíva v odraze guľôčky z bodu dopadu D_z na šikmú plochu zvislo nahor, lebo po zastavení v najvyššom bode zvislého pohybu sa guľôčka vracia po rovnakej trajektórii nadol do bodu D_z a odrazí sa od šikmej plochy rovnakou rýchlosťou a pod rovnakým uhlom akým dopadol po prilete z bodu O. Po odraze teda sleduje pôvodnú trajektóriu šikmého vrhu. Trajektóriu O– D_z preletí v opačnom smere D_z –O.

Ďalšie prípady by mohli nastať, keby sa guľôčka pri dopade na šikmú plochu odrazila tak, že by pokračovala ďalším šikmým vrhom a až po druhom dopade na šikmú plochu by sa odrazila kolmo na odrazovú plochu alebo zvislo nahor.

Podobne by mohla guľôčka prejsť viacerými odrazmi, ale posledný by musel byť vždy zvislo nahor alebo kolmo na šikmú plochu, aby sa trajektória pri návrate reprodukovala.

- c1) V prípade kolmého dopadu guľôčka na šikmú plochu je tesne pred dopadom smer jej pohybu daný uhlom $\delta_k = -(\pi/2 - \beta)$, obr. RA-1, a platí

$$\tan \delta_k = \frac{v_{Dk,y}}{v_{Dk,x}} = -\frac{1}{\tan \beta}$$

a po dosadení

$$\tan \delta_k = \frac{v_{0k} \sin \alpha - g t_{Dk}}{v_{0k} \cos \alpha} = \tan \alpha - \frac{g t_{Dk}}{v_{0k} \cos \alpha},$$

odkiaľ máme čas letu do bodu D odrazu

$$t_{Dk} = \frac{v_{0k} \cos \alpha}{g} (\tan \alpha - \tan \delta_k) = \frac{v_{0k} \cos \alpha}{g} \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

Súradnice bodu D sú

$$x_{Dk} = v_{0k} t_{Dk} \cos \alpha = \frac{v_{0k}^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan \beta} \right)$$

$$y_{Dk} = v_{0k} t_{Dk} \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_{Dk}^2 = \frac{v_{0k}^2 \cos^2 \alpha}{2g} \left(\tan^2 \alpha - \frac{1}{\tan^2 \beta} \right).$$

Pre súradnice bodu D_k na naklonenej rovine platí vzťah

$$x_{Dk} = d + \frac{y_{Dk}}{\tan \beta}$$

a po dosadení a úprave

$$v_{0k} = \frac{\sqrt{2gd}}{\cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{2 \tan \alpha - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan^2 \alpha - 2 - \frac{1}{\tan^2 \beta} \right)}}.$$

Prvá podmienka je kladná hodnota výrazu pod odmocninou

$$2 \tan \alpha - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan^2 \alpha - 2 - \frac{1}{\tan^2 \beta} \right) > 0.$$

Nerovnicu upravíme na tvar

$$\tan^2 \alpha - 2 \tan \beta \tan \alpha - \left(2 + \frac{1}{\tan^2 \beta} \right) < 0.$$

Nulové body ľavej strany sú

$$\tan \alpha = \tan \beta \pm \sqrt{\tan^2 \beta + 2 + \frac{1}{\tan^2 \beta}} = \tan \beta \pm \left(\tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

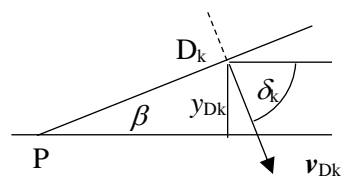
Nerovnica je splnená medzi nulovými bodmi. Keďže menší z nich je záporný, je podmienka

$$0 < \alpha < \arctan \left(2 \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right) = \alpha_{k \max}.$$

Druhá podmienka je $v_{0k} > v_{0 \min}$. Po dosadení dostávame nerovnicu

$$\frac{1}{\sqrt{2 \tan \alpha - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan^2 \alpha - 2 - \frac{1}{\tan^2 \beta} \right)}} > \frac{1}{\sqrt{4 \tan \alpha}}.$$

Keďže výrazy pod odmocninami sú kladné, môžeme ich porovnať



Obr. RA-1

$$\tan^2 \alpha + 2 \tan \beta \tan \alpha - \left(2 + \frac{1}{\tan^2 \beta} \right) > 0.$$

Nulové body ľavej strany v tomto prípade sú

$$\tan \alpha = -\tan \beta \pm \sqrt{\tan^2 \beta + 2 + \frac{1}{\tan^2 \beta}} = -\tan \beta \pm \left(\tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

Výraz je kladný mimo interval daný nulovými bodmi. Keďže menšie riešenie je záporné, je podmienka (znamienko +)

$$\alpha > \arctan \left(\frac{1}{\tan \beta} \right) = \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \right] = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha_{k \min}.$$

Prvý prípad kolmého dopadu môže nastať pre $\alpha_{k \min} < \alpha < \alpha_{k \max}$.

Pre dané hodnoty $50^\circ < \alpha < 70,8^\circ$,

a teda pre $\alpha_1 = 45^\circ$ tento prípad nenastane, pozn. $v_{0k1} \approx 6,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} < v_{0 \min}$

a pre $\alpha_2 = 60^\circ$ máme $v_{0k2} \approx 9,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- c2) V druhom prípade sa guľôčka odrazí zvislo nahor, tzn. uhol odrazu vzhľadom na kolmicu k šikmej ploche je β . Tesne pred dopadom je uhol medzi vektorom rýchlosti v_{Dz} a vodorovným smerom $\delta_z = -(\pi/2 - 2\beta)$, a teda

$$\tan \delta_z = \frac{v_{Dz,y}}{v_{Dz,x}},$$

a po dosadení

$$-\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = -\frac{1}{\tan 2\beta} = \frac{v_{0z} \sin \alpha - g t_{Dz}}{v_{0z} \cos \alpha},$$

odkiaľ máme

$$t_{Dz} = \frac{v_{0z} \cos \alpha}{g} \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right).$$

Súradnice bodu D_z sú

$$x_{Dz} = v_{0z} t_{Dz} \cos \alpha = \frac{v_{0z}^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right)$$

$$y_{Dz} = v_{0z} t_{Dz} \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_{Dz}^2 = \frac{v_{0z}^2 \cos^2 \alpha}{2g} \left(\tan^2 \alpha - \frac{1}{\tan^2 2\beta} \right).$$

Pre súradnice platí vzťah

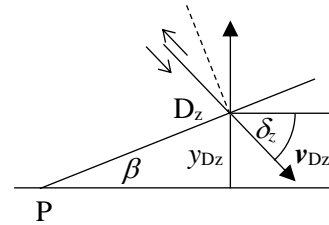
$$x_{Dz} = d + \frac{y_{Dz}}{\tan \beta}$$

a po dosadení a úprave

$$v_{0z} = \frac{\sqrt{2gd}}{\cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{\left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \left[2 - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \right]}}.$$

Prvá podmienka je kladný výraz pod odmocninou

$$\left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \left[2 - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \right] > 0.$$



Obr. RA-2

Nerovnicu upravíme na tvar

$$\tan^2 \alpha - 2 \tan \beta \tan \alpha - \left(2 \frac{\tan \beta}{\tan 2\beta} + \frac{1}{\tan^2 2\beta} \right) < 0.$$

Nulové body ľavej strany sú

$$\tan \alpha = \tan \beta \pm \sqrt{\tan^2 \beta + 2 \frac{\tan \beta}{\tan 2\beta} + \frac{1}{\tan^2 2\beta}} = \tan \beta \pm \left(\tan \beta + \frac{1}{\tan 2\beta} \right).$$

Výraz je záporný v intervale medzi nulovými bodmi, tzn.

$$\alpha < \arctan \left(2 \tan \beta + \frac{1}{\tan 2\beta} \right) = \alpha_{z \max}.$$

Druhá podmienka je $v_{0z} > v_{0 \min}$, z ktorej rovnakým postupom získame podmienku

$$\alpha > \arctan \left(\frac{1}{\tan 2\beta} \right) = \arctan \tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \alpha_{z \min}.$$

Podmienka pre uskutočnenie druhého prípadu je $\alpha_{z \min} < \alpha < \alpha_{z \max}$.

Pre dané hodnoty $10,0^\circ < \alpha < 61,7^\circ$,

a teda pre $\alpha_1 = 45^\circ$ je $v_{0z1} \approx 12,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

a pre $\alpha_2 = 60^\circ$ $v_{0z2} \approx 37,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- d) Čas návratu pri kolmom dopade na šikmú plochu $t_{\text{Nk}} = 2 t_{\text{Dk}}$, tzn.

$$t_{\text{Nk}} = 2 \sqrt{\frac{2d}{g}} \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \beta}}{\sqrt{2 \tan \alpha - \frac{1}{\tan \beta} (\tan^2 \alpha - 2) + \frac{1}{\tan^3 \beta}}}.$$

Podmienky pre kolmý odraz sú splnené iba pre uhol $\alpha_2 = 60^\circ$, pričom $t_{\text{Nk}2} \approx 2,9 \text{ s}$.

V druhom prípade odrazu zvislo hore čas do dopadu na šikmú plochu

$$t_{\text{Dz}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta}}{\sqrt{\left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \left[2 - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \right]}}.$$

Gulôčka sa po odraze od šikmej plochy pohybuje zvislo nahor s počiatočnou rýchlosťou v_{Dz} .

Z obr. RA-2 platí pre vodorovnú zložku rýchlosti

$$v_{0z} \cos \alpha = v_{\text{Dz}} \cos \delta_z = v_{\text{Dz}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = v_{\text{Dz}} \sin 2\beta, \text{ odkiaľ } v_{\text{Dz}} = v_{0z} \frac{\cos \alpha}{\sin 2\beta}.$$

Pre rýchlosť pohybu zvislo hore platí

$$v = v_{\text{Dz}} - g t, \text{ kde } t \text{ je čas od okamihu odrazu.}$$

V najvyššom bode M trajektórie je $v_{\text{M}} = 0$, čo zodpovedá času

$$t_{\text{M}} = \frac{v_{\text{Dz}}}{g} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \frac{1}{\sin 2\beta} \frac{1}{\sqrt{\left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \left[2 - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan 2\beta} \right) \right]}}.$$

Po dosiahnutí bodu M sa gulôčka pohybuje nazad, pričom dopadne do bodu D_z a po odraze pokračuje do bodu O, pričom kopíruje trajektóriu pohybu do bodu M. Celkový čas od vrhu do návratu $t_{\text{Nz}} = 2 (t_{\text{Dz}} + t_{\text{M}})$, a teda

$$t_{Nz} = 2 \sqrt{\frac{2d}{g}} \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\beta}}{\sqrt{\left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan 2\beta}\right) \left[2 - \frac{1}{\tan \beta} \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan 2\beta}\right)\right]}}$$

Pre dané hodnoty:

pre $\alpha_1 = 45^\circ$ je $t_{Nz1} \approx 4,0$ s,

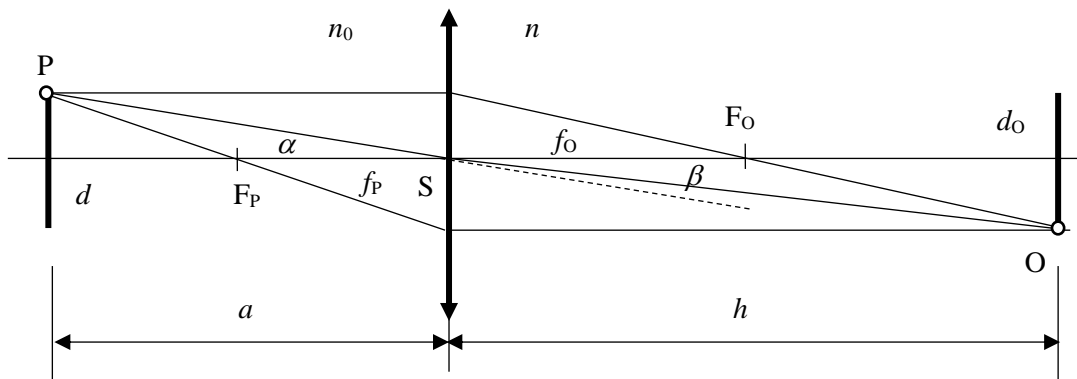
pre $\alpha_2 = 60^\circ$ je $t_{Nz2} \approx 11,2$ s.

Pozn.: Je možné použiť aj iný postup, najmä pri určovaní podmienok, vedú však na rovnaké všeobecné a numerické výsledky.

2) Neznáma kvapalina

Riešenie:

a) Obr. RA-2



Obr. RA-2

Zobrazíme bod P (okraj žiarivej plochy LED) do bodu O na tienidle. Lúč prechádzajúci stredom S šošovky sa láme z prostredia s indexom lomu n_0 do prostredia s indexom lomu n , a teda pre uhly α a β platí zákon lomu

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{n_0}.$$

Lúč, ktorý prechádza predmetovým ohniskom F_P sa láme na šošovke rovnobežne s optickou osou. Obráz O je v priesečníku lúčov. Lúč z P postupujúci rovnobežne s osou sa láme do bodu O cez obrazové ohnisko F_O na optickej osi. Takto možno určiť aj polohu obrazového ohniska F_O ako priesečník lúča s optickou osou, pričom pre ohniskové vzdialenosti platí $f_O > f_P$.

b) Na predmetovej strane máme z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{d}{2(a - f_P)} = \frac{d_{OV}}{2f_P}, \text{ odkiaľ } f_P = \frac{d_{OV}}{d + d_{OV}} a$$

a na obrazovej strane

$$\frac{d_{OV}}{2(h_V - f_O)} = \frac{d}{2f_O}, \text{ odkiaľ } f_O = \frac{d}{d_{OV} + d} h_V.$$

Pre lom lúča prechádzajúceho stredom šošovky platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{d \sqrt{d_{\text{OV}}^2 + 4h_{\text{V}}^2}}{d_{\text{OV}} \sqrt{d^2 + 4a^2}} = \frac{n_{\text{V}}}{n_0}.$$

Po úprave vyjadríme priemer obrazu krúžka

$$d_{\text{OV}} = \frac{2n_0 h_{\text{V}}}{\sqrt{(n_{\text{V}}^2 - n_0^2)d^2 + 4n_{\text{V}}^2 a^2}} d. \quad (1)$$

Predmetová ohnisková vzdialenosť je

$$f_{\text{P}} = \frac{2n_0 h_{\text{V}} a}{2n_0 h_{\text{V}} + \sqrt{(n_{\text{V}}^2 - n_0^2)d^2 + 4n_{\text{V}}^2 a^2}}. \quad (2)$$

Obrazová ohnisková vzdialenosť je

$$f_{\text{O}} = \frac{\sqrt{(n_{\text{V}}^2 - n_0^2)d^2 + 4n_{\text{V}}^2 a^2}}{2n_0 h_{\text{V}} + \sqrt{(n_{\text{V}}^2 - n_0^2)d^2 + 4n_{\text{V}}^2 a^2}} h_{\text{V}}$$

Pre dané hodnoty: $d_{\text{OV}} \approx 24,3$ mm, $f_{\text{P}} \approx 29,0$ mm, $f_{\text{O}} \approx 38,9$ mm.

- c) Šošovka je ploskovypuklá, s vodorovnou plochou v kvapaline, a s vypuklou časťou vo vzduchu. Lúč dopadajúci z kvapaliny kolmo na rovnú plochu šošovky sa neláme, preto lúče z obrazového priestoru rovnobežné s optickou osou sa lámu do predmetového ohniska s ohniskovou vzdialenosťou vždy rovnako, nezávisle na indexe lomu kvapaliny. Inými slovami, hodnota f_{P} nezávisí na indexe lomu n_{V} kvapaliny pod šošovkou.

Prípadne možno vychádzať zo vzťahu pre obrazovú ohniskovú vzdialenosť

$$\frac{n_0}{f_{\text{P}}} = \frac{n_0}{R_1} \left(\frac{n_{\text{s}}}{n_0} - 1 \right) + \frac{n_{\text{k}}}{R_2} \left(\frac{n_{\text{s}}}{n_{\text{k}}} - 1 \right).$$

Pre polomer krivosti plochej strany šošovky $R_2 \rightarrow \infty$, a tak člen obsahujúci index lomu n_{V} vypadne.

Do vzťahov (1) a (2) dosadíme namiesto veličín pre vodu veličiny pre meranú kvapalinu.

$$f_{\text{P}} = \frac{2n_0 h_{\text{V}} a}{2n_0 h_{\text{V}} + \sqrt{(n_{\text{V}}^2 - n_0^2)d^2 + 4n_{\text{V}}^2 a^2}} = \frac{2n_0 h_1 a}{2n_0 h_1 + \sqrt{(n_1^2 - n_0^2)d^2 + 4n_1^2 a^2}}.$$

Po úprave dostávame pre prvú kvapalinu index lomu

$$n_1 = \sqrt{\frac{n_{\text{V}}^2 h_1^2 (d^2 + 4a^2) + n_0^2 d^2 (h_{\text{V}}^2 - h_1^2)}{h_{\text{V}}^2 (d^2 + 4a^2)}}.$$

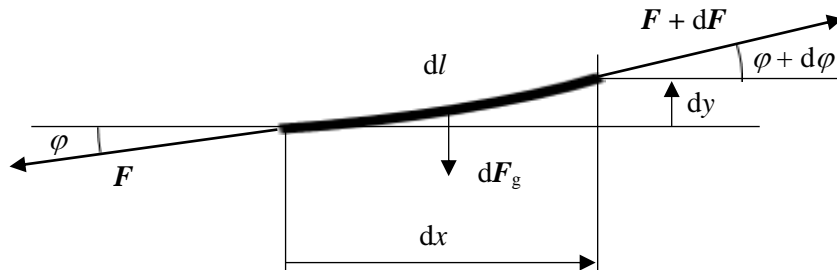
Pre dané hodnoty $n_1 \approx 1,39$; $n_2 \approx 1,49$; $n_3 \approx 1,68$.

3) Dvíhanie lana

Riešenie:

Tvar lana opisuje funkcia $y = f(x)$. Na obr. RA-3 je znázornený elementárny úsek lana s dĺžkou

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$



Obr. RA-3

Keďže je lano zakrivené, na elementárnom úseku sa zmení uhol φ dotyčnice o $d\varphi$. Ťahová sila sa zmení z F na ľavom okraji na $F + dF$ na pravom okraji. Pre úsek platia rovnice rovnováhy síl vo vodorovnom a zvislom smere

$$(F + dF) \cos(\varphi + d\varphi) = F \cos \varphi$$

$$(F + dF) \sin(\varphi + d\varphi) = F \sin \varphi + dF_g,$$

kde $dF_g = \mu g dl$ je tiažová sila pôsobiaca na elementárny úsek.

Rovnice upravíme na tvar ($\cos d\varphi \approx 1$, $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $F + dF \approx F$)

$$F \sin \varphi d\varphi \approx dF \cos \varphi$$

$$F \cos \varphi d\varphi + dF \sin \varphi \approx \mu g dl.$$

Ak uvážime

$$dl = \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dy}{\sin \varphi}, \text{ tak } \tan \varphi = \frac{dy}{dx},$$

Z rovníc vylúčime $d\varphi$ a výsledok upravíme na tvar

$$dF = \mu g dy.$$

Integráciou tejto rovnice dostávame

$$F_B - F_A = \mu g h, \quad (1)$$

pričom

$$F_B \cos \varphi = F_A, \quad F_B \sin \varphi = \mu g l,$$

odkiaľ máme

$$F_B = \sqrt{F_A^2 + (\mu g l)^2}. \quad (2)$$

a) Na posúvanie lana pri ťahovej sile navijaka F_T je potrebný výkon P_m , odkiaľ

$$F_T = \frac{P_m}{v}.$$

Táto sila je rovná sile napínajúcej lano v hornom bode B, $F_B = F_T$.

Silu T_A v bode A určíme zo vzťahu (1)

$$F_A = F_B - \mu g h = \frac{P_m}{v} - \mu g h.$$

Pre dané hodnoty: $F_T \approx 147 \text{ N}$, $F_A \approx 88 \text{ N}$.

- b) Zo vzťahov (1) a (2) vylúčime silu T_A a vyjadríme dĺžku l

$$l = h \sqrt{\frac{2F_B}{\mu g h} - 1} = h \sqrt{\frac{2P_m}{v \mu g h} - 1}.$$

Pre dané hodnoty $l \approx 30$ m.

4) Napájanie žiarovky

Riešenie:

- a) Prúd $I_N = 2,5$ A.

$$i = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2}, \text{ odkiaľ } d = \sqrt{\frac{4I}{\pi i}}, \text{ pre dané hodnoty } d \approx 0,56 \text{ mm.}$$

Použijeme vodič s priemerom $d = 0,6$ mm.

- b) Dĺžka jadra l_J a prierez S_J

$$H l_J = N I, \text{ magnetický tok jadra } \Phi = B S_J = \mu \mu_0 \frac{N I}{l_J} S_J.$$

Magnetický tok cievky

$$\Phi_c = N \Phi = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 I}{l_J} S_J = L_c I, \text{ odkiaľ } L_c = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l_J} S_J.$$

Odpor vinutia cievky

$$R_c = \rho_m \frac{l_m}{S_m} = \rho_m \frac{4 N l_z}{\pi d^2},$$

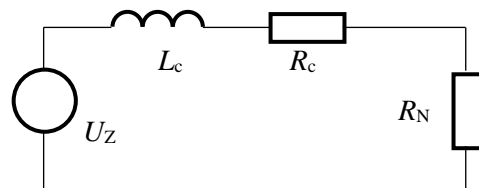
kde l_z je priemerná dĺžka jedného závitú cievky.

$$\frac{L_c}{R_c} = \frac{\mu_r \mu_0 \pi d^2 S_J}{\rho_m 4 l_J l_z} N = k N, \text{ kde } k = \frac{\mu_r \mu_0 \pi d^2 S_J}{\rho_m 4 l_J l_z}.$$

- c) Zapojenie obvodu, obr. RA-4.

Cievku nahradíme sériovým zapojením induktora L_c a rezistora R_c . Žiarovku predstavuje rezistor R_N , pričom platí

$$R_N = \frac{P_N}{I^2} = \frac{U_N^2}{P_N}.$$



Obr. RA-4

- d) Obvodová rovnica obvodu

$$\mathbf{U}_Z = [(R_N + R_c) + j\omega L_c] \mathbf{I},$$

resp.

$$U_Z = \sqrt{(R_N + R_c)^2 + (\omega L_c)^2} I.$$

Po dosadení

$$U_Z = \sqrt{\left(\frac{U_N^2}{P_N} + \rho_m \frac{4 N l_z}{\pi d^2} \right)^2 + \left(\omega \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l_J} S_J \right)^2} \frac{P_N}{U_N}$$

alebo s použitím vyjadrenia $L_c = k N R_c$ (v prípade, že ste neodvodili vzťah pre L_c a k)

$$U_Z = \sqrt{\left(\frac{U_N^2}{P_N} + \rho_m \frac{4Nl_z}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\omega k N \rho_m \frac{4Nl_z}{\pi d^2}\right)^2} \frac{P_N}{U_N}.$$

e) Pre určenie počtu závitov N pre danú hodnotu U_Z vzťah upravíme na tvar

$$\left(\frac{U_Z U_N}{P_N}\right)^2 = \left(\frac{U_N^2}{P_N} + \frac{4\rho_m l_z}{\pi d^2} N\right)^2 + \left(\frac{4\omega k \rho_m l_z}{\pi d^2} N^2\right)^2$$

a ďalej napr.

$$\left(\frac{4\omega k \rho_m l_z}{\pi d^2}\right)^2 N^4 + \left(\frac{4\rho_m l_z}{\pi d^2}\right)^2 N^2 + \frac{8\rho_m l_z U_N^2}{\pi d^2 P_N} N - \left(\frac{U_Z U_N}{P_N}\right)^2 + \left(\frac{U_N^2}{P_N}\right)^2 = 0$$

alebo

$$N^2 \left[(\omega k)^2 N^2 + 1 \right] - \frac{\pi d^2}{2\rho_m l_z} \left[\frac{\pi d^2}{8\rho_m l_z} \left(\frac{U_Z^2 - U_N^2}{P_N} \right) - N \right] \frac{U_N^2}{P_N} = 0$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$N^2 \left[(2,09)N^2 + 1 \right] - (2,69 \cdot 10^3) \left[(6,12 \cdot 10^4) - N \right] = 0.$$

Rovnicu riešime numericky. Pre $N = 60$ je výraz záporný, pre $N = 120$ kladný, tzn. riešenie je v tomto intervale. Po postupnom zužovaní intervalu určíme výslednú hodnotu $N \approx 94$.

Pre kontrolu určíme: $L_c \approx 0,29$ H, $R_c \approx 0,67$ Ω a pre $R_N \approx 9,60$ Ω dostávame impedanciu obvodu $Z \approx 92$ Ω a prúd žiarovky $I \approx 2,5$ A, čo zodpovedá nominálnym hodnotám U_N a P_N .

63. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy celoštátneho kola kategórie A

Autori návrhov úloh:

Lubomír Konrád 1-3, Ivo Čáp 4

Recenzia:

Aba Teleki, Lubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka:

Aba Teleki

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2022