MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

1 Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla a, b platí nerovnosť

$$a(a+1)+b(b-1) \geq 2ab.$$

Zistite tiež, kedy nastáva rovnosť.

(Jaromír Šimša)

Riešenie:

Zadanú nerovnosť postupne ekvivalentne upravujeme:

$$\begin{gathered} a(a+1)+b(b-1) \geq 2ab, \\ (a^2+a)+(b^2-b)-2ab \geq 0, \\ (a^2-2ab+b^2)+(a-b) \geq 0, \\ (a-b)^2+(a-b) \geq 0, \\ (a-b)(a-b+1) \geq 0. \end{gathered}$$

Poslednú nerovnosť posúdime pre celé čísla a a b v dvoch prípadoch.

- Ak $a \geq b$, tak $a-b \geq 0$, a teda aj $a-b+1>0$, takže dokopy máme $(a-b)(a-b+1) \geq 0$ s rovnosťou práve pre $a=b$.
- Ak $a<b$, tak $a-b<0$, čo pre celé číslo $a-b$ znamená, že $a-b \leq -1$, čiže $a-b+1 \leq 0$. Spolu s $a-b<0$ tak máme $(a-b)(a-b+1) \geq 0$ s rovnosťou práve pre $a=b-1$.

Dôkaz nerovnosti je teda ukončený a rovnosť nastane práve vtedy, keď pre celé čísla a, b platí $a=b$ alebo $a=b-1$.

Poznámka:

Potrebnú úpravu nerovnosti aj následnú diskusiu možno spraviť aj tak, že uvážime celé číslo $x=a-b$. Ak potom dosadíme $a=b+x$ do zadanej nerovnosti, po roznásobení a zrušení rovnakých členov na oboch stranách nám zostane nerovnosť $x^2+x \geqq 0$, čiže $x(x+1) \geqq 0$ a dokončenie je jednoduché.

Poznámka:

Uveďme ešte malú obmenu druhej časti uvedeného riešenia. Z upravenej nerovnosti $(a-b)(a-b+1) \geq 0$ hneď vidíme, že aj v pôvodnej nerovnosti nastane rovnosť práve v dvoch prípadoch: $a=b$ a $a=b-1$. Ak nenastane žiadny z nich, nebude celé číslo a rovné žiadnemu z dvoch susedných celých čísel $b-1$ a b, takže bude platiť buď $a>b$, alebo $a<b-1$. V každom z týchto prípadov budú mať oba činitele $a-b$, $a-b+1$ rovnaké znamienko, a ich súčin tak bude kladný.

Pokyny:

V prípade čiastočných riešení dajte:

- 2 body za úpravu nerovnosti na súčinový tvar $(a-b)(a-b+1) \geq 0$, prípadne na tvar $x^2+x \geq 0$ po zavedení substitúcie $x=a-b$.
- 2 body za vyriešenie prípadu $a \geq b$, resp. $x \geq 0$.
- 2 body za vyriešenie prípadu $a<b$, resp. $x<0$.

Dva body z prvej položky možno udeliť aj za úpravu na tvar, ako je $(a-b)^2+(a-b) \geq 0$ či $(b-a)^2 \geq b-a$, ale iba ak žiak ďalej dokáže aj s takou nerovnosťou vyriešiť *oba* prípady $a \geq b$ a $a<b$ (potom však ide o úplné riešenie). Ak s ňou vyrieši iba jeden prípad $a \geq b$, resp. $a<b$, dajte celkom 2, resp. 3 body.

V každom z oboch uvedených prípadov možno strhnúť po 1 bode za drobné nedostatky v nerovnostnej argumentácii. Ak riešiteľ vyčlení triviálny prípad $a=b$ samostatne, za ten žiadny bod neudeľujte, hodnoťte ho spolu s prípadom $a>b$. V prípade chybnej analýzy prípadov rovnosti strhnite dokopy nanajvýš 1 bod. Len za uhádnutie *oboch* prípadov rovnosti ($a=b$ a $a=b-1$) dajte 1 bod, ktorý sa však nedá pripočítať ku 2 bodom za úpravu nerovnosti z prvej položky pokynov.

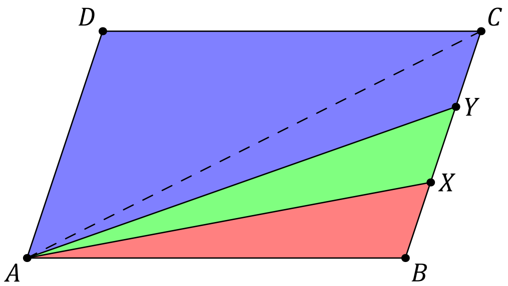
2 Daný je rovnobežník $ABCD$ a na jeho obvode body X a Y rôzne od bodu A tak, že priamky AX a AY delia tento rovnobežník na tri časti s rovnakým obsahom. Určte pomer obsahu trojuholníka AXY a obsahu rovnobežníka $ABCD$.

(David Hruška)

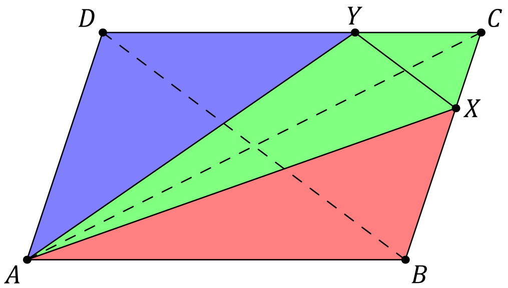
Riešenie:

Aby priamky AX a AY rozdeľovali rovnobežník $ABCD$ na tri časti, musia byť zrejme body X a Y navzájom rôzne a žiadny z nich nemôže ležať ani na strane AB, ani na strane AD. Každý z nich teda leží na strane BC alebo CD. Zdôvodnime v ďalšom odseku, že jeden z bodov X, Y musí ležať vnútri strany BC a druhý vnútri strany CD, keď podľa zadania všetky tri časti rozdeleného rovnobežníka majú v porovnaní s ním tretinový obsah.

Keďže uhlopriečka AC rozpoľuje obsah rovnobežníka $ABCD$, žiadna z troch častí s tretinovým obsahom nemôže obsahovať ani celý trojuholník ABC, ani celý trojuholník ACD. Keby však oba body ležali na strane BC ako na obrázku, jedna z troch častí by obsahovala celý trojuholník ACD. Rovnako tak sa vylúči prípad, keď oba body X, Y ležia na strane CD.



Keďže označenie X a Y môžeme navzájom vymeniť, budeme ďalej predpokladať, že bod X leží vnútri strany BC a bod Y vnútri strany CD. Rovnobežník $ABCD$ je potom rozdelený na dva trojuholníky ABX, AYD a štvoruholník $AXCY$.



Podľa zadania platí $\mathrm{S}(ABX) = \mathrm{S}(AYD) = \mathrm{S}(ABCD)/3$. Keďže trojuholníky ABX a ABC majú spoločnú výšku z vrcholu A, platí

$$\frac{|BX|}{|BC|} = \frac{\mathrm{S}(ABX)}{\mathrm{S}(ABC)} = \frac{\frac{\mathrm{S}(ABCD)}{3}}{\frac{\mathrm{S}(ABCD)}{2}} = \frac{2}{3},$$

odkiaľ $|BX| = \frac{2}{3}|BC|$, takže $|CX| = \frac{1}{3}|BC|$. Podobne porovnaním trojuholníkov AYD a ACD dostaneme $|CY| = \frac{1}{3}|CD|$. Dokopy dostávame, že podľa vety *sus* sú trojuholníky CXY a CBD podobné v pomere $1 : 3$. Platí teda

$$\mathrm{S}(CXY) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \mathrm{S}(CBD) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{S}(ABCD)}{2} = \frac{\mathrm{S}(ABCD)}{18}.$$

Štvoruholník $AXCY$ má tiež obsah $\mathrm{S}(ABCD)/3$ a je zložený z trojuholníkov AXY a CXY. Obsah druhého z nich už poznáme, takže platí

$$\mathrm{S}(AXY) = \frac{\mathrm{S}(ABCD)}{3} - \mathrm{S}(CXY) = \frac{\mathrm{S}(ABCD)}{3} - \frac{\mathrm{S}(ABCD)}{18} = \frac{5}{18} \cdot \mathrm{S}(ABCD).$$

Hľadaný pomer obsahov je teda $5 : 18$.

Pokyny:

V prípade čiastočných riešení dajte:

- 1 bod za vylúčenie prípadu, keď oba body X a Y ležia na jednej zo strán BC alebo CD;
- 2 body za určenie aspoň jedného z pomerov, v akom body X, Y delia príslušnú zo strán BC, resp. CD;

- 2 body za výpočet pomeru obsahu trojuholníka CXY k obsahu rovnobežníka $ABCD$.

Absenciu vylúčenia polôh bodov X a Y na stranách AB a AD nepenalizujte. Nepenalizujte ani zabudnutie prípadov, keď X alebo Y je totožný s jedným z vrcholov B, C, D. Jeden bod však strhnite, ak chýba vysvetlenie, prečo oba body X a Y nemôžu ležať na jednej zo strán BC, AD.

---

3 Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych dvojciferných prirodzených čísel. Cifru c nazveme *dobrou*, ak súčet tých čísel z tabule, ktoré obsahujú cifru c, je 71.

a) Ktoré z cifier 0 až 9 môžu byť dobré?

b) Najviac koľko cifier môže byť dobrých súčasne?

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

a) Nasledujúce príklady vždy jedného alebo dvoch čísel napísaných na tabuli ukazujú, že cifry 1, 2, 3, 4, 5, 7 môžu byť dobré:

1: 71
2: 29, 42
3: 32, 39
4: 24, 47
5: 15, 56
7: 71

Ukážeme, že žiadna zo zvyšných cifier 0, 6, 8 a 9 nemôže byť nikdy dobrá. Dokážeme to pre ne jednotlivo, budeme pritom vždy hovoriť o výskytoch danej cifry v číslach na tabuli.

0: Cifra 0 môže byť iba na miestach jednotiek. Ale súčet takých čísel vždy končí cifrou 0, a nie požadovanou cifrou 1.

6: Keby boli cifry 6 iba na miestach jednotiek, bol by súčet čísel s cifrou 6 párny, a teda rôzny od 71. Majme teda aspoň jedno číslo tvaru 6_. Preň však platí $6\_ < 71 < 60 + 16$, takže súčet 71 sa nedá získať.

8: Cifra 8 je príliš veľká na to, aby bola niekde na mieste desiatok. Musí teda byť všade na miestach jednotiek, súčet takých čísel je však párny.

9: Cifra 9 môže byť (z rovnakého dôvodu ako cifra 8) iba na mieste jednotiek. Aby súčet takých čísel končil na 1, museli by sme ich sčítať aspoň 9, ale $9 \cdot 19 > 71$.

Zhrnutím dostávame, že dobré môžu byť práve cifry 1, 2, 3, 4, 5 a 7.

b) Dokážeme najskôr, že všetky do úvahy prichádzajúce cifry 1, 2, 3, 4, 5 a 7, ktorých je celkom 6, nemôžu byť dobré súčasne. Na to stačí ukázať, že dobré nemôžu byť súčasne cifry 4 a 7.

Skúmajme teda, kedy je cifra 4 dobrá. Keďže číslo 71 je nepárne, všetky sčítané čísla nemôžu mať cifru 4 na mieste jednotiek. Aspoň jedno číslo tak má cifru 4 na mieste desiatok, navyše dve také čísla zrejme existovať nemôžu. Máme teda práve jedno číslo začínajúce na 4 a k tomu aspoň jedno číslo končiace na 4. Aj toto číslo je však jediné, lebo $40 + 14 + 24 > 71$. Nutne tak máme (na tabuli) práve dve čísla s cifrou 4, konkrétne 4_ a _4, a ich súčet je 71. Ide teda o čísla 47 a 24.

Predpokladajme teraz, že je dobrá cifra 7. Keby sa vyskytovala iba na miestach jednotiek, muselo by to tak byť v aspoň 3 číslach, aby ich súčet končil cifrou 1, avšak $17 + 27 + 37 > 71$. Dobrá cifra 7 sa tak niekde vyskytuje na mieste desiatok – vtedy je na tabuli zrejme jediné číslo s cifrou 7, konkrétne číslo 71.

Z posledných dvoch odsekov už vyplýva, že cifry 4 a 7 nemôžu byť súčasne dobré – na tabuli by museli súčasne byť čísla 47, 24 a 71, takže cifra 7 by nebola dobrá.

Podľa úvodu z časti b) to znamená, že počet dobrých cifier na tabuli je vždy nanajvýš 5. Tento počet možno dosiahnuť, stačí na tabuľu napísať čísla

$$10, 11, 15, 16, 19, 20, 24, 27, 33, 38, 47, 56.$$

V takom prípade totiž platí:

- $10 + 11 + 15 + 16 + 19 = 71$, takže cifra 1 je dobrá.
- $20 + 24 + 27 = 71$, takže cifra 2 je dobrá.
- $33 + 38 = 71$, takže cifra 3 je dobrá.
- $24 + 47 = 71$, takže cifra 4 je dobrá.
- $15 + 56 = 71$, takže cifra 5 je dobrá.

Najväčší možný počet súčasne dobrých cifier je teda 5.

Pokyny:

Dajte 3 body za časť a) a 3 body za časť b). V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne.

A1 Určenie všetkých šiestich cifier 1, 2, 3, 4, 5, 7, ktoré môžu byť dobré, spolu s uvedením vyhovujúcich príkladov – 1 bod. Tento bod neudeľujte, ak chýba čo i len jedna cifra alebo príklad pre ňu, alebo ak je uvedená naopak niektorá cifra, ktorá nemôže byť dobrá.

A2 Určenie všetkých štyroch cifier 0, 6, 8, 9, ktoré nemôžu byť dobré, podložené patričnými zdôvodneniami – 2 body. Čiastočný 1 bod je možné udeliť, ak je iba jedna zo štyroch cifier vynechaná.

B1 Dôkaz tvrdenia, že cifry 4 a 7 nemôžu byť súčasne dobré – 1 bod. (Iná dvojica cifier z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ túto negatívnu vlastnosť nemá.) Tento bod možno získať aj za dôkaz tvrdenia, že cifry 1, 5, 7 nemôžu byť súčasne dobré, alebo aj iného tvrdenia vedúceho k rovnakému potrebnému záveru, že dobrých cifier zároveň nemôže byť viac ako päť.

B2 Nájdenie príkladu čísel s piatimi dobrými ciframi – 2 body.

Celkovo potom dajte súčet bodov za položky A1, A2, B1 a B2. Ak žiak nepostupuje podľa uvedenej schémy, dosiahne však relevantné zistenia, je možné udeliť až 2 body (ak je napríklad zdôvodnené, ktoré z cifier 4, 5, 6, 7, 8 a 9 môžu byť dobré, a navyše aké čísla na tabuli s každou z týchto dobrých cifier musia byť). Len za hypotézu, že najväčší možný počet dobrých čísel na tabuli je 5, však žiadny bod neudeľujte.

---

4 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný rovnakému číslu s. Určte najväčšiu možnú hodnotu s.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Majme ľubovoľnú tabuľku 10×10 vyplnenú podľa zadania úlohy a okrem čísla s uvažujme aj súčet T všetkých čísel v tejto tabuľke. Keďže súčet čísel v každom riadku až na jeden je 0, tak hodnota T je rovná súčtu 10 čísel v tomto jednom riadku, ktorý je nanajvýš 10. Platí teda $T \leq 10$.

Na druhej strane, pri počítaní súčtu T po stĺpcoch našej tabuľky dostaneme podľa zadania za deväť stĺpcov dokopy hodnotu $9s$. K nej ešte musíme pripočítať súčet 10 čísel v zvyšnom desiatom stĺpci, čo je vždy najmenej -10. Tým pádom platí $T \geq 9s - 10$.

Spojením nerovností $T \leq 10$ a $T \geq 9s - 10$ dostávame $10 \geq T \geq 9s - 10$, odkiaľ $10 \geq 9s - 10$ čiže $9s \leq 20$. Číslo s je však celé, a preto posledná nerovnosť už vedie k odhadu $s \leq 2$.

Ako ukazuje nasledujúca tabuľka, hodnota 2 je dosiahnuteľná:

−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1
−1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
−1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1
−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Najväčšia možná hodnota s je teda 2.

Pokyny:

Za dôkaz odhadu $s \leq 2$ dajte 3 body a za príklad tabuľky pre hodnotu 2 zvyšné 3 body.

V prípade čiastočných riešení dajte:

- 1 bod za pozorovanie, že každé možné s je párne;
- (najviac) 1 bod za príklad vyhovujúcej tabuľky pre inú hodnotu s ako 2;
- 1 bod v prípade iba uhádnutia odpovede $s = 2$ (bez príkladu tabuľky), ak však celkový zisk týmto neprekročí 3 body.

Za triviálnu nerovnosť $s \leq 10$ žiadny bod neudeľujte.
