

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

- 1 Pani učiteľka prikázala deťom, aby číslo napísané na tabuli vynásobili tromi a k výsledku pripočítali číslo sedem. Kika správne zapísala aj vypočítala požadovanú úlohu. Jej kamarátka Sára síce počítala správne, ale inú úlohu: omylom dané číslo vynásobila siedmimi a k výsledku pripočítala číslo tri. Jej výsledok bol o 84 väčší ako ten Kikin. Ktoré číslo bolo napísané na tabuli?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Predstavme si, že by Sára k sedemnásobku daného čísla pripočítala namiesto čísla 3 číslo 7 (respektíve že by Kika k trojnásobku svojho čísla nepripočítala 7, ale iba 3). Potom by sa ich výsledky nelíšili o 84, ale o 88. Tento rozdiel však zodpovedá štvornásobku čísla napísaného na tabuli. To znamená, že na tabuli bolo napísané číslo $88 : 4$ čiže 22.

Kikin výsledok bol teda $22 \cdot 3 + 7$ čiže 73 a Sárin $22 \cdot 7 + 3$ čiže 157, čo je naozaj o 84 viac.

Poznámka:

Ak by sme neznáme číslo na tabuli označili n , tak by Kikin výsledok bol $3n + 7$ a Sárin $7n + 3$. Pre rozdiel ich výsledkov potom platí:

$$(7n + 3) - (3n + 7) = 84,$$

$$(7n + 7) - (3n + 7) = 88,$$

$$4n = 88,$$

$$n = 22.$$

Poznámka:

Úlohu je možné vyriešiť aj systematickým skúšaním možností a porovnávaním Kikinho a Sárinho výsledku.

Pokyny:

2 body za pomocné úvahy a úpravy, 2 body za výsledok, 2 body za komentár zodpovedajúcej kvality.

- 2 Myslím si tri rôzne prirodzené čísla. Súčin prvého a druhého je 24. Súčin druhého a tretieho je 32. Súčin prvého a tretieho je 48. Ktoré čísla si myslím?

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

Súčin prvého a tretieho čísla je dvojnásobkom súčinu prvého a druhého čísla, preto musí byť tretie číslo dvakrát väčšie ako druhé. Súčin 32 je potom súčinom druhého mysleného čísla a jeho dvojnásobku. Súčin druhého mysleného čísla so sebou samým potom bude $32 : 2$ čiže 16, teda druhé myslené číslo je 4. Tretie myslené číslo je potom $2 \cdot 4$ čiže 8 a zo súčinu 24 vyplýva, že prvé číslo je $24 : 4$ čiže 6. (Pre kontrolu si môžeme overiť, že súčin prvého a tretieho je $6 \cdot 8$ čiže 48.)

Myslené čísla sú 6, 4 a 8.

Riešenie 2:

Súčin prvého a druhého čísla je menší ako súčin druhého a tretieho čísla, teda prvé číslo je menšie ako tretie. Súčin druhého a tretieho čísla je menší ako súčin prvého a tretieho čísla, teda druhé číslo je menšie ako prvé. Myslené čísla sú teda podľa veľkosti usporiadané nasledovne:

$$\text{druhé} < \text{prvé} < \text{tretie}.$$

Číslo 24 môžeme napísať v tvare súčinu dvoch prirodzených čísel (pričom prvé je menšie ako druhé) nasledujúcimi spôsobmi: $1 \cdot 24$, $2 \cdot 12$, $3 \cdot 8$ a $4 \cdot 6$. Pre každú z týchto možností budeme uvažovať menší činiteľ ako možné druhé a väčší ako možné prvé číslo. Zo známeho súčinu 32 potom vypočítame možné tretie číslo a overíme, či vyjde súčin prvého a tretieho čísla rovný 48:

druhé	prvé	tretie (čiže $32 : \text{druhé}$)	prvé \cdot tretie
1	24	32	768
2	12	16	192
3	8	$32 : 3 \notin \mathbb{N}$	-
4	6	8	48

Jediná vyhovujúca možnosť je v poslednom riadku tabuľky; myslené čísla sú 6, 4 a 8.

Riešenie 3:

Podľa zadania prvé krát druhé je 24 a druhé krát tretie je 32, takže súčin týchto dvoch súčinov je $24 \cdot 32$ čiže 768. Na poradí činiteľov v súčine nezáleží, preto činitele tohto súčinu 768 možno napísať aj v poradí „prvé krát tretie krát druhé krát druhé“. Podľa zadania je však prvé krát tretie 48, takže súčin 768 je 48-násobkom súčinu druhé krát druhé. To znamená, že druhé krát druhé je $768 : 48$ čiže 16, a teda druhé číslo je 4.

Keďže prvé krát druhé je 24, prvé je $24 : 4$ čiže 6, a keďže druhé krát tretie je 32, tretie je $32 : 4$ čiže 8.

Lahko vidieť, že nájdené čísla 6, 4 a 8 skutočne spĺňajú podmienky zo zadania.

Poznámka:

3. riešenie možno sprehľadniť tým, že si hľadané čísla označíme postupne písmenami a, b, c . Potom podľa zadania platí $a \cdot b = 24, b \cdot c = 32, a \cdot c = 48$. Z toho dostávame:

$$(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) = 24 \cdot 32 = 768,$$

$$(a \cdot c) \cdot (b \cdot b) = 768,$$

$$48 \cdot (b \cdot b) = 768,$$

$$b \cdot b = 768 : 48 = 16,$$

$$b = 4,$$

a potom

$$a = (a \cdot b) : b = 24 : 4 = 6,$$

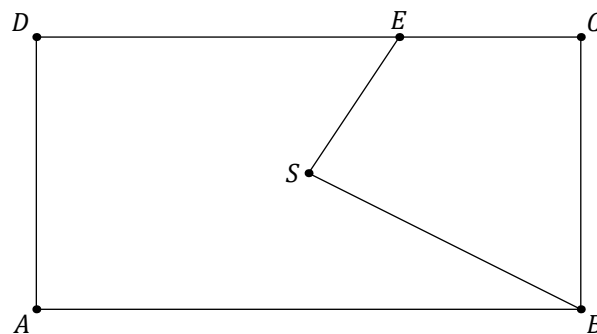
$$c = (b \cdot c) : b = 32 : 4 = 8.$$

Zhrnutím dostávame $a = 6, b = 4, c = 8$, nájdené čísla 6, 4, 8 vyhovujú podmienkam zo zadania.

Pokyny:

2 body za pomocné úvahy alebo úpravy, 2 body za výsledok, 2 body za komentár zodpovedajúcej kvality

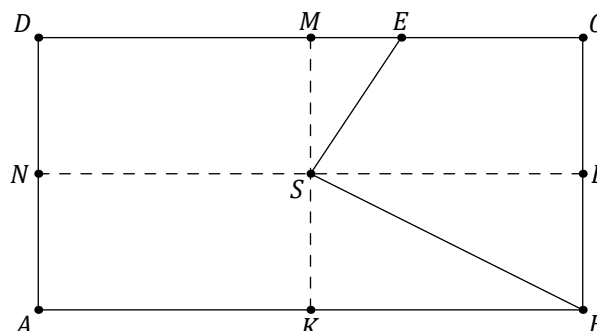
- 3 Strana AB obdĺžnika $ABCD$ meria 12 cm, strana BC meria 6 cm. Bod S je stred tohto obdĺžnika a bod E leží na strane CD . Obsah štvoruholníka $BCES$ je tretinou obsahu obdĺžnika $ABCD$. Vypočítajte dĺžku úsečky CE .



(Erika Novotná)

Riešenie:

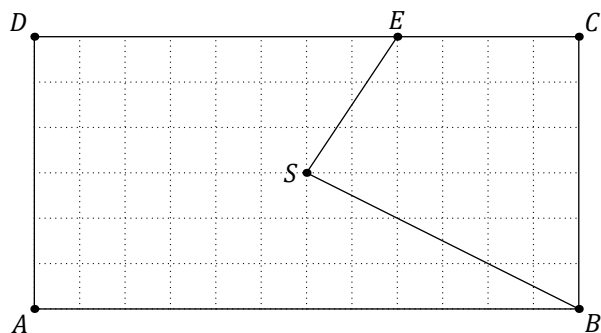
Obsah obdĺžnika $ABCD$ je $12 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}$ čiže 72 cm^2 . Obsah štvoruholníka $BCES$ je jeho tretinou čiže 24 cm^2 . Pre ďalší postup je výhodné označiť si stredy strán obdĺžnika $ABCD$ postupne K, L, M a N a rozdeliť obdĺžnik na štyri zhodné obdĺžniky tak, ako je to na obrázku:



Tieto obdĺžniky majú strany dlhé 6 cm a 3 cm, každý z nich má teda obsah 18 cm^2 . Štvoruholník $BCMS$ sa skladá z jedného celého a polovice takého obdĺžnika, preto má obsah $18 \text{ cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot 18 \text{ cm}^2$ čiže 27 cm^2 . To je viac ako 24 cm^2 , teda bod E skutočne leží na úsečke MC (a nie na úsečke MD). Aby mal štvoruholník $BCES$ požadovaný obsah, musí mať trojuholník EMS obsah 3 cm^2 . Trojuholník EMS je pravouhlý a jeho strana MS meria 3 cm, preto strana ME musí merať 2 cm (lebo $3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} : 2 = 3 \text{ cm}^2$). Dĺžka úsečky CE je potom $6 \text{ cm} - 2 \text{ cm}$ čiže 4 cm .

Poznámka:

Predchádzajúce úvahy je možné nahradiť experimentovaním v dostatočne jemnej štvorčekovej sieti. Útvar potom vyzerá (až na mierku) takto:



Pokyny:

2 body za obsah štvoruholníka $BCES$ a ďalšie pomocné úvahy, 2 body za výsledok, 2 body za komentár zodpovedajúcej kvality