
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

1 Karol narysoval trojuholník ADE . Na strane AD vyznačil body B a C . Zistil, že:

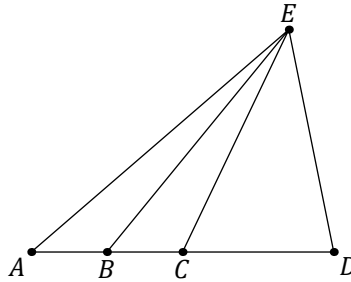
- bod C je stredom strany AD ,
- trojuholníky ABE a BCE majú rovnaký obsah,
- BDE je rovnoramenný trojuholník so základnou BE ,
- obvod trojuholníka ABE je o 6 cm väčší ako dĺžka lomenej čiary EBC ,
- obvod trojuholníka ACE je o 2 cm väčší ako obvod trojuholníka CDE .

Vypočítajte obvod trojuholníka ADE .

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Karolov trojuholník vyzerá (až na mierku) takto:



Trojuholníky ABE a BCE majú rovnaký obsah a spoločnú výšku, teda úsečky AB a BC musia byť rovnako dlhé. Dĺžka lomenej čiary EBC je súčtom dĺžok úsečiek EB a BC . Obvod trojuholníka ABE je súčtom dĺžok AB , BE a AE . Keďže $|AB| = |BC|$, obvod trojuholníka ABE sa od dĺžky lomenej čiary EBC líši len o dĺžku úsečky AE . Preto $|AE| = 6$ cm.

Ďalej obvod trojuholníka ACE je o 2 cm väčší ako obvod trojuholníka CDE . Bod C je v strede úsečky AD , takže $|AC| = |CD|$. Úsečku CE majú trojuholníky spoločnú, líšia sa teda len v dĺžkach strán AE a DE . Z uvedeného vyplýva, že strana DE je o 2 cm kratšia ako strana AE , čiže meria 4 cm.

Trojuholník BDE je rovnoramenný so základnou BE , preto aj $|BD| = 4$ cm. B je stred AC , C je stred AD , takže $|AB|$ je štvrtinou $|AD|$ a $|BD| = \frac{3}{4}|AD| = 4$ cm.

Preto $|AD| = 16/3$ cm a obvod trojuholníka ADE je $(6 + 4 + 16/3)$ cm čiže $15\frac{2}{3}$ cm.

Pokyny:

3 body za pomocné výpočty a čiastkové výsledky, 3 body za výsledok a komentár požadovanej kvality.

Poznámka:

V pôvodnom zadaní znelo štvrté Karolovo zistenie takto:

- obvod trojuholníka ABE a BCE je o 6 cm väčší ako dĺžka lomenej čiary EBC ,

čiže sa doňho nešťastne votrela (aj slovosled kaziaci) podmienka na obvod trojuholníka BCE . Táto chyba, žiaľ, spôsobila nekonzistenciu zadania. Za (správne) zdôvodnenie neexistencie Karolovho trojuholníka treba preto tiež udeliť 6 bodov.

2 Mám trikrát menej rokov ako môj otec. Starší z mojich dvoch bratov má 11 rokov, mladší 9 rokov. Môj vek je pätnásobkom tretiny veku mladšieho z bratov. Zvláštnosťou našej rodiny je, že sme sa všetci narodili 12. apríla, takže dnes oslavujeme narodeniny.

O koľko rokov bude vek nášho otca rovný súčtu vekov všetkých jeho synov?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Mladší z bratov má 9 rokov, rozprávač teda musí mať $5 \cdot (9 : 3)$ čiže 15 rokov. Mám trikrát menej rokov ako otec, takže otec má $3 \cdot 15$ čiže 45 rokov.

Zo znenia nie je jasné, či rozprávačom je chlapec alebo dievča. Rozoberme teda oba prípady:

- Nech je to chlapec.

Aktuálny súčet vekov všetkých troch bratov je potom $9 + 11 + 15$ čiže 35 rokov. Každý rok sa vek otca zvýši o 1 rok, zatiaľ čo súčet vekov bratov o 3 roky, takže 10-ročný rozdiel medzi vekom otca a súčtom vekov jeho troch synov sa každým rokom zníži o 2 roky. Vek otca teda bude rovnaký ako súčet vekov troch bratov o $10 : 2$ čiže 5 rokov.

- Nech je to dievča.

Aktuálny súčet vekov jej dvoch bratov je potom $9 + 11$ čiže 20 rokov. Každý rok sa vek otca zvýši o 1 rok, zatiaľ čo súčet vekov bratov o 2 roky, takže 25-ročný rozdiel medzi vekom otca a súčtom vekov jeho dvoch synov sa každým rokom zníži o 1 rok. Vek otca teda bude rovnaký ako súčet vekov dvoch bratov o 25 rokov.

Poznámka:

Toto riešenie môžeme zapísať aj symbolicky: O r rokov bude mať otec $45 + r$ rokov a jeho synovia spolu v chlapčenskej verzii $35 + 3r$ rokov a v dievčenskej $20 + 2r$. Z požadovanej rovnosti $35 + 3r = 45 + r$, resp. $20 + 2r = 45 + r$ dostávame $r = 5$, resp. $r = 25$.

Poznámka:

Úlohu je možné riešiť aj postupným pripočítavaním rokov k veku otca a veku bratov:

- Chlapčenská verzia:

čas	1. brat	2. brat	3. brat	bratia spolu	otec
teraz	9	11	15	35	45
o 1 rok	10	12	16	38	46
o 2 roky	11	13	17	41	47
o 3 roky	12	14	18	44	48
o 4 roky	13	15	19	47	49
o 5 rokov	14	16	20	50	50
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ako vidieť, číslo v predposlednom stĺpci sa zväčšuje o 3 a v poslednom o 1, nebudú sa už teda rovnať v žiadanom ďalšom riadku.

- Dievčenská verzia:

čas	1. brat	2. brat	bratia spolu	otec
teraz	9	11	20	45
o 1 rok	10	12	22	46
o 2 roky	11	13	24	47
o 3 roky	12	14	26	48
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
o 23 roky	32	34	66	68
o 24 rokov	33	35	68	69
o 25 rokov	34	36	70	70
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ako vidieť, číslo v predposlednom stĺpci sa zväčšuje o 2 a v poslednom o 1, nebudú sa už teda rovnať v žiadanom ďalšom riadku.

Pokyny:

3 body za čiastkové výsledky; 3 body za dopočítanie a komentár požadovanej kvality.

Poznámka:

Na (nezámerný) chyták s neurčeným pohlavím rozprávača nás upozornil jeden pozorný riešiteľ. Na plný počet bodov preto stačí správne vyriešiť ľubovoľný z uvedených prípadov.

- 3** Eva mala šesť kartičiek. Na každej z nich bola napísaná práve jedna z číslic 1, 2, 3, 4, 5 a 6 (vždy iná). Presúvaním svojich šiestich kartičiek Eva tvorila rôzne čísla a skúmala ich vlastnosti. Zistila, že vie zložiť rôzne trojice čísel, z ktorých je každé deliteľné šiestimi. (Vždy pritom použila všetkých 6 svojich kartičiek.) Napíšte všetky takéto trojice čísel.

Riešenie:

Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je párne a jeho ciferný súčet je deliteľný tromi. Každé z vytvorených čísel teda musí končiť párnou číslicou. Tie máme k dispozícii práve tri: 2, 4 a 6. Jediná voľnosť v tvorbe je teda pri umiestňovaní zvyšných číslic na miesta desiatok, prípadne stoviek. Pridanie číslice 3 k akémukoľvek číslu nemá na jeho deliteľnosť tromi vplyv. Prednostne teda umiestnime číslice 1 a 5 tak, aby bola splnená podmienka deliteľnosti tromi. Dá sa to spraviť jediným spôsobom: (12, 54, 6). Pokiaľ po doplnení číslice 3 vznikne trojciferné číslo, môžeme poradie číslic na mieste desiatok a stoviek zameniť a deliteľnosť dvomi aj tromi to neovplyvní. Celkovo tak dostávame nasledujúcich 5 možností:

- (312, 54, 6), (132, 54, 6);
- (12, 354, 6), (12, 534, 6);
- (12, 54, 36).

Pokyny:

2 body za úvodné postrehy týkajúce sa deliteľnosti, 2 body za zhrnutie a výpis možností, 2 body za komentár požadovanej kvality.