63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

Kategória C

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Dve kyvadla

Riešenie:

a) Guľôčka 1 nadobudne pre zrážkou rýchlosť, ktorú určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = m_1 g\, l \text{ , odkiaľ } \quad v_{10} = \sqrt{2 g\, l} \text{ .}$$

Po zrážke sú rýchlosti guľôčok v_1, v_2, pričom je splnený zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania kinetickej energie

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

a po úprave, napr.,

$$v_{10} - v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \quad \text{a} \quad \left(v_{10} - v_1\right)\left(v_{10} + v_1\right) = \frac{m_2}{m_1} v_2^2 \text{ .}$$

Ak druhú rovnicu delíme prvou, dostaneme

$$v_{10} + v_1 = v_2 \text{ .}$$

Z dvoch lineárnych rovníc dostaneme po úprave

$$v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \quad \text{a} \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \text{ ,}$$

pričom $v_2 > 0$ a $v_1 < 0$.

S použitím zákona zachovania mechanickej energie dostaneme príslušné výšky

(1) $$h_{1a} = \frac{1}{2 g} v_1^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 l < l \text{ .}$$

(2) $$h_{2a} = \frac{1}{2 g} v_2^2 = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l < l \text{ .}$$

Pre dané hodnoty $h_{1a} \approx 4{,}6$ cm, $h_{2a} \approx 8{,}2$ cm.

b) V druhom prípade je postup rovnaký, a príslušné výšky sú

(3) $$h_{2b} = \frac{1}{2 g} v_1^2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 l < l$$

(4) $$h_{1b} = \frac{1}{2 g} v_2^2 = \left(\frac{2 m_2}{m_2 + m_1}\right)^2 l > l \text{ .}$$

Maximálna výška je $h_{1b} = 2\, l$, čo zodpovedá podmienke

$$p_1 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2{,}41 \text{.}$$

Ak je splnená podmienka $p_1 \leq 2{,}41$, určuje výšku h_{1b} vzťah (4), v opačnom prípade je $h_{1b} = 2\, l$.

Pre dané hodnoty $h_{2b} \approx 4{,}6$ cm, keďže $m_2 = 2{,}5\, m_1$, je $h_{1b} = 2\, l = 50$ cm.

c) Ak majú byť výšky vychýlenia rovnaké, musia byť rovnaké rýchlosti v_1 a v_2 po zrážke.
V prípade podľa b) je $h_{1b} < h_{2b}$, tzn. podmienku rovnakej výšky nemožno splniť pre $m_1 < m_2$.

V prípade a) je podmienka $h_{1a} = h_{2a}$

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 .$$

Pre $m_2 > m_1$ dostávame po odmocnení

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{2 m_1}{m_2 + m_1}$$, odkiaľ určíme podmienku

$$\frac{m_2}{m_1} = 3 .$$

Po dosadení do vzťahu (1)

$h_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4} l$. Pre dané hodnoty $h_{\mathrm{m}} \approx 6{,}25$ cm.

Pozn.: Iný postup: začiatočná potenciálna energia sa rozdelí medzi potenciálne energie oboch častíc v rovnakej výške h_{m}

$$m_1\, g\, l = m_1\, g\, h_{\mathrm{m}} + m_2\, g\, h_{\mathrm{m}} ,$$

odkiaľ $h_{\mathrm{m}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, l = \frac{1}{4} l .$

2) Družica

Riešenie:

a) Na kružnicovej trajektórii s polomerom R na družicu pôsobí gravitačná sila $F_0 = m\, g$, ktorá vyvolá dostredivé zrýchlenie

$a = \frac{F_0}{m} = \frac{v_1^2}{R} = g$, odkiaľ $v_1 = \sqrt{g\, R}$. Pre dané hodnoty $v_1 \approx 7{,}92$ km·h^{-1}.

b) Vo vzdialenosti r pôsobí na družicu gravitačná sila

(1) $F_{\mathrm{G}} = G \frac{M\, m}{r^2}$.

Gravitačná sila na povrchu Zeme

$F_{\mathrm{G0}} = G \frac{M\, m}{R^2} = m\, g$, kde $g = G \frac{M}{R^2}$.

Silu (1) vyjadríme pomocou g a r

$$F_{\mathrm{G}} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} m = m\, g \frac{R^2}{r^2} = m\, g^* .$$

Určíme rýchlosť družice na trajektórii s polomerom r rovnako ako v časti a)

$$v = \sqrt{g^* r} = \sqrt{g\, R} \sqrt{\frac{R}{r}} = v_1 \sqrt{\frac{R}{r}} = k\, v_1 .$$

Odtiaľ určíme

$k = \sqrt{\dfrac{R}{r}}$, a ďalej $r = \dfrac{R}{k^2}$. Pre dané hodnoty r = 2,00 $R \approx 1{,}28 \times 10^7$ m.

c) Družica obieha okolo Zeme s uhlovou rýchlosťou

$$\omega_\mathrm{d} = \frac{v}{r} = \frac{k\,v_1}{r} = k^3 \sqrt{\frac{g}{R}}$$

a Zem sa otáča okolo svojej osi s uhlovou rýchlosťou

$$\omega_\mathrm{Z} = \frac{2\pi}{T}.$$

Uhlová rýchlosť družice vzhľadom na povrch Zeme je $\omega_{1,2} = \omega_\mathrm{d} \pm \omega_\mathrm{Z}$. Znamienko (+) pri obehu proti smeru otáčania Zeme – od východu na západ, a (–) v smere otáčania Zeme – od západu na východ.

Počet obehov družice za čas T vzhľadom na povrch Zeme

$$n_{1,2} = \frac{T}{T_{1,2}} = \frac{T}{2\pi}\omega_{1,2},$$

kde

$$n_1 = \frac{T}{2\pi}\omega_1 = \frac{T}{2\pi}\left(\omega_\mathrm{d} + \omega_\mathrm{Z}\right) = k^3 \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}} + 1,$$ pre pohyb družice od východu na západ.

Pre dané hodnoty n_1 = 7.

$$n_2 = \frac{T}{2\pi}\omega_2 = \frac{T}{2\pi}\left(\omega_\mathrm{d} - \omega_\mathrm{Z}\right) = k^3 \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}} - 1,$$ pre pohyb družice od západu na východ.

Pre dané hodnoty n_2 = 5.

3) Stláčanie plynu

Riešenie:

a) Hmotnosť $m = n\,M$, kde n je látkové množstvo, ktoré určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$pV = n\,R\,T$, kde T je termodynamická teplota ($\{T\} = \{t\} + 273{,}15$).

Potom dostávame $m = M\,\dfrac{p_0 V_0}{R\,T_0}$. Pre dané hodnoty m = 11,3 g.

b) Ide o izotermický dej, pre ktorý platí

(1) $p = \dfrac{p_0 V_0}{V}$.

Výsledný tlak

$$p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1} = 2\,p_0.$$ Pre danú hodnotu p_1 = 400 kPa.

Pre zmenu vnútornej energie plynu U platí

$$-\Delta U = W + Q,$$

ke W je práca vykonaná plynom a Q teplo odovzdané plynom do okolia.

Vnútorná energia plynu sa pri izotermickom deji nemení, odvedené teplo

$$Q_1 = -W_1 = -\,p_0 V_0 \ln\frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \ln\frac{V_0}{V_1}.$$

Pre dané hodnoty $Q_1 \approx 693$ J.

c) Keďže nedochádza k výmene tepla, ide o adiabatický dej, pre ktoré platia rovnice

$$pV^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa} \quad \text{a} \quad \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Po vylúčení tlaku dostávame

$T_2 = T_0 \left(\dfrac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa-1}$. Pre dané hodnoty $T_2 \approx 393$ K a $t_2 \approx 120$ °C.

Keďže pri rýchlom stlačení (adiabatický dej) $Q = 0$, je práca vykonaná vonkajšou silou rovná zmene vnútornej energie plynu

$W_2 = \Delta U = C_V\left(T_2 - T_0\right) = \dfrac{s}{2} n R\left(T_2 - T_0\right)$, pričom $\kappa = \dfrac{s+2}{s}$, resp. $\dfrac{s}{2} = \dfrac{1}{\kappa - 1}$.

Po dosadení a úprave

$$W_2 = \frac{1}{\kappa-1}\frac{p_0 V_0}{T_0}\left(T_2 - T_0\right) = \frac{1}{\kappa-1} p_0 V_0 \left[\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right].$$

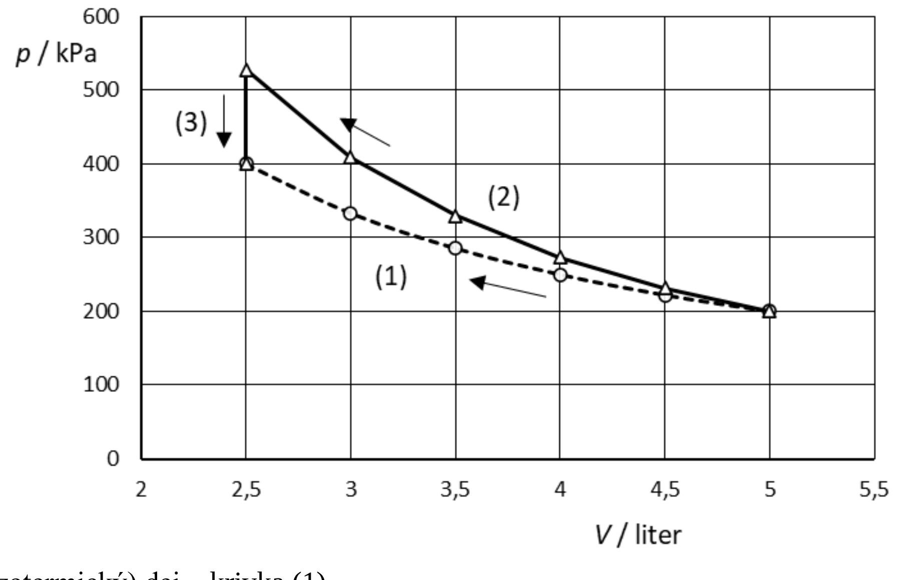
Pre dané hodnoty $W_2 \approx 799$ J.

Pri chladnutí plynu pri konštantnom objeme sa nekoná práca, preto odvedené teplo je rovné úbytku vnútornej energie. Keďže vnútorná energia ideálneho plynu závisí iba od teploty, je konečná vnútorná energia po vyrovnaní teploty na t_0 rovná vnútornej energii na začiatku pred stláčaním. Preto odvedené teplo Q_2 je rovné práci W_2 vykonanej vonkajšou silou pri stláčaní plynu.

d) Tabuľka

Objem/l	5	4,5	4	3,5	3	2,5
Tlak/kPa (izo T)	200	222	250	286	333	400
Tlak/kPa (adiabat)	200	232	273	330	409	528

Graf



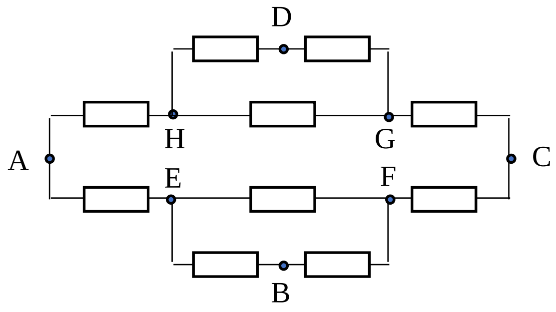
Prvý (izotermický) dej – krivka (1)

Druhý dej – adiabatický a izochorický – krivky (2) a (3)

4) Uvoľnené teplo

Riešenie:

a) Keďže obvod je súmerný podľa osi AC, majú uzly H a E a taktiež F a G rovnaký potenciál. Preto prúd $I_{EH} = I_{FG} = 0$.



Obr. RC–1

Ak vodiče EH a FG odstránime, pomery v obvode sa nezmenia.
Na obr. RC–1 je schéma zjednodušeného obvodu.
Medzi bodmi AC sú dve rovnaké paralelné vetvy. Výsledný odpor

$$R_{AC} = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} + R\right) = \frac{4}{3}R\,.$$

Prúd zdroja

$$I_1 = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{3}{4}\frac{U}{R} \quad (= 0{,}90\ \text{A}).$$

Prúd $I_{AH} = \frac{I_1}{2} = \frac{3}{8}\frac{U}{R}$. Pre dané hodnoty $I_{AH} = 0{,}45$ A.

Medzi uzlami H a G sú dve paralelné vetvy, jedna je vodič HG, druhá sériová dvojica HD a DG. Ide o prúdový delič

$$I_{HG} = \frac{I_1}{2}\frac{2R}{2R+R} = \frac{1}{4}\frac{U}{R} \quad \text{a} \quad I_{HD} = \frac{I_1}{2}\frac{R}{2R+R} = \frac{1}{8}\frac{U}{R}\,.$$

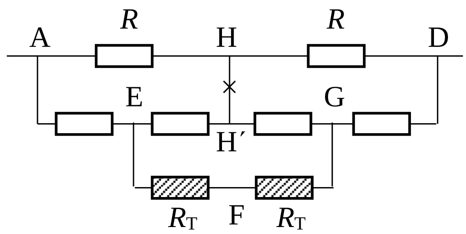
Pre dané hodnoty $I_{HG} = 0{,}30$ A, $I_{HD} = 0{,}15$ A.

b) Výkon zdroja

$$P_1 = U\,I_1 = \frac{3}{4}\frac{U^2}{R}\,.$$

Pre dané hodnoty $P_1 = 10{,}8$ W.

c) Na obr. RC–2 je obvod prekreslený vzhľadom na uzly A a D. Rezistory s čiarkovanou výplňou predstavujú celá trojuholník medzi uzlami EF a FG, pričom



Obr. RC–2

$$R_T = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R\,.$$

Obvod je súmerný okolo osi HF, preto všetky body na tejto osi majú rovnaký potenciál a neprechádza medzi nimi prúd. Spoj H´H môžeme odstrániť (označené krížikom) a obvod medzi A a D pozostáva z dvoch paralelných vetiev, jednej AHD s odporom $R_{AHD} = 2R$ a druhej AEGD s odporom

$$R_{AFGD} = R + \frac{2R \cdot 2R_T}{2R + 2R_T} + R = \frac{14}{5}R\,.$$

Výsledný odpor

$$R_{AD} = \frac{R_{AHD}\,R_{AEGD}}{R_{AHD} + R_{AEGD}} = \frac{7}{6}R\,.$$

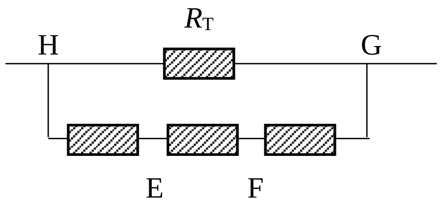
Výkon zdroja

$$P_2 = \frac{U^2}{R_{AD}} = \frac{6}{7}\frac{U^2}{R}\,.$$

Pre dané hodnoty $P_2 \approx 12{,}3$ W.

d) Obvod prekreslíme podľa obr. RC–3. Medzi uzlami HG je v jednej vetve trojuholník HGD s odporom R_T a v druhej vetve tri trojuholníky HEA, EFB, FGC zapojené do série s celkovým odporom $3R_T$. Výsledný odpor

$$R_{HG} = \frac{R_T \cdot 3R_T}{R_T + 3R_T} = \frac{3}{4}R_T = \frac{1}{2}R\,.$$



Obr. RC–3

Výkon zdroja

$$P_3 = \frac{U^2}{R_{HG}} = \frac{2U^2}{R}\,.$$

Pre dané hodnoty $P_3 = 28{,}8$ W.

e) Pre výkony zdroja v jednotlivých prípadoch platí

$P_1 < P_2 < P_3$.

Autori návrhov úloh: Kamil Bystrický (1, 3). Ľubomír Konrád (2, 4)
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2022