MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh školského kola kategórie C

1 Koľko zo 72 zlomkov

$$\frac{0 \cdot 0}{72}, \quad \frac{1 \cdot 1}{71}, \quad \frac{2 \cdot 2}{70}, \quad \frac{3 \cdot 3}{69}, \quad \dots, \quad \frac{71 \cdot 71}{1}$$

má celočíselnú hodnotu?

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Ak označíme d menovateľ jedného zo zlomkov, tak jeho čitateľ je rovný $(72 - d)^2$. Zlomok potom pre každé uvažované d z množiny $\{1, 2, \dots, 72\}$ môžeme upraviť nasledovne:

$$\frac{(72-d)^2}{d} = \frac{72^2 - 2 \cdot 72 \cdot d + d^2}{d} = \frac{72^2}{d} - 2 \cdot 72 + d.$$

Taká hodnota je celé číslo práve vtedy, keď číslo d je deliteľom čísla 72^2. Zostáva tak zistiť, koľko má číslo 72^2 kladných deliteľov rovných najviac 72. Vykonáme to dvoma rôznymi spôsobmi:

1 Číslo 72^2 čiže $(8 \cdot 9)^2$ čiže $2^6 \cdot 3^4$ má celkovo $(6+1) \cdot (4+1)$ čiže 35 kladných deliteľov, pretože to sú práve čísla tvaru $2^a \cdot 3^b$, kde $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Všetky tieto čísla, ktoré pritom sú najviac rovné 72, vypíšeme. Urobíme to systematicky, a to tak, že do prvého riadka zapíšeme čísla s rozkladom 2^a (až do 2^6, lebo $2^6 = 64 < 72$), do druhého čísla s rozkladom $2^a \cdot 3$, do tretieho čísla s rozkladom $2^a \cdot 3^2$, do štvrtého čísla s rozkladom $2^a \cdot 3^3$ a do piateho čísla s rozkladom $2^a \cdot 3^3$:

a	0	1	2	3	4	5	6	
2^a	1	2	4	8	16	32	64	
$2^a \cdot 3$	3	6	12	24	48			$(2^5 \cdot 3 = 96 > 72)$
$2^a \cdot 3^2$	9	18	36	72				$(2^4 \cdot 3^2 = 144 > 72)$
$2^a \cdot 3^3$	27	54						$(2^2 \cdot 3^3 = 108 > 72)$
$2^a \cdot 3^4$								$(2^0 \cdot 3^4 = 81 > 72)$

Vidíme, že hľadaný počet deliteľov je $7 + 5 + 4 + 2$ čiže 18.

2 Tentoraz delitele čísla 72^2, ktoré neprevyšujú 72, nebudeme vypisovať. Využijeme pritom iba vyššie uvedený poznatok, že všetkých deliteľov čísla 72^2 je 35. Jedným z týchto deliteľov je číslo 72. Ak je d ľubovoľný z deliteľov menších ako 72, tak aj $72^2/d$ je deliteľ 72^2, ale je väčší než 72. Naopak, každému deliteľu e väčšiemu než 72 bude zodpovedať deliteľ $72^2/e$, ktorý je menší než 72. Vidíme, že deliteľov čísla 72^2 menších ako 72 je práve toľko, koľko ich je väčších ako 72. Dokopy ich je $35 - 1$ čiže 34, takže deliteľov menších ako 72 je $34 : 2$ čiže 17, a preto deliteľov rovných najviac 72 je $17 + 1$ čiže 18.

Poznámka:

K hľadanému počtu 18 deliteľov je možné dôjsť aj postupným testovaním, ktoré z čísel od 1 do 72 sú deliteľmi čísla 72^2. K tomu sa samozrejme oplatí mať informáciu o tom, že 72^2 má rozklad $2^6 \cdot 3^4$. Testovanie je možné výrazne urýchliť tak, že najprv z vypísaného radu čísel od 1 do 72 postupne vyškrtneme ako nevyhovujúce všetky násobky prvočísel 5, 7 a 11, prípadne aj niekoľkých ďalších, alebo dokonca násobky všetkých prvočísel väčších ako 3 a menších ako 72. V poslednom prípade už nám zostanú nevyškrtnuté iba čísla tvaru $2^a 3^b$, pritom vďaka nerovnostiam $2^7 > 72$ a $3^4 > 72$ to všetko budú naozaj delitele čísla 72^2.

Dodajme, že namiesto uvedeného testovania menovateľov zlomkov zo zadania je možné testovať priamo celočíselnosť samotných zlomkov. Tento náročný postup je skôr úlohou pre počítač, preto ho do našej bodovacej schémy nezahrnieme. O jeho hodnotení sa zmienime v záverečnom odseku pokynov.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky alebo zistenia nasledovne:

A1 Zápis zlomkov v tvare $(72 - d)^2/d$: 1 bod.

A2 Zlomok s menovateľom d vyhovuje zadaniu práve vtedy, keď je d deliteľom čísla 72^2: 2 body.

B1 Každý deliteľ čísla 72^2 je číslo tvaru $2^a 3^b$, pričom $0 \le a \le 6$ a $0 \le b \le 4$: 1 bod.

B2 Určenie počtu 18 tých čísel z B1, ktoré neprevyšujú 72, ich výpisom: 3 body.

C1 Určenie počtu 35 všetkých deliteľov čísla 72^2: 1 bod.

C2 Rozdelenie všetkých deliteľov čísla 72^2 rôznych od 72 do dvojíc $(d, 72^2/d)$: 2 body.

C3 Určenie hľadanej odpovede na základe C1 a C2: 1 bod.

D Určenie hľadanej odpovede testovaním, ktoré čísla od 1 do 72 sú deliteľmi čísla 72^2: 4 body, pritom 1 bod strhnite za každé chybne otestované číslo či za chybné spočítanie prvkov správne určeného súboru všetkých vyhovujúcich čísel. (Priebeh celého testovania musí byť zaznamenaný, aby bola zrejmá jeho úplnosť, inak za D dajte najviac 1 bod.)

Celkovo potom dajte súčet maxima z bodov z A1 a bodov z A2 a maxima zo súčtu bodov z B1 a z B2, súčtu bodov z C1, z C2 a z C3 a počtu bodov z D.

Správne postupy s drobnými numerickými chybami alebo vynechaním deliteľov čísla 72^2 (napr. 1 alebo 72) oceňte 4 alebo 5 bodmi.

Ak riešiteľ testuje priamo zlomky zo zadania, zo 6 bodov strhnite 1 bod za každý chybne otestovaný alebo zabudnutý zlomok či za chybné spočítanie prvkov správne určeného súboru všetkých vyhovujúcich zlomkov. Ak zo zápisu postupu nie je zrejmé, že boli otestované všetky zlomky, dajte najviac 2 body.

---

2 V danom pravouhlom trojuholníku ABC označme K stred prepony AB a L stred kratšej odvesny AC. Kružnica s priemerom BC pretína úsečku KL v bode P. Dokážte, že uhly PAC a PBC sú zhodné.

(Jaromír Šimša)

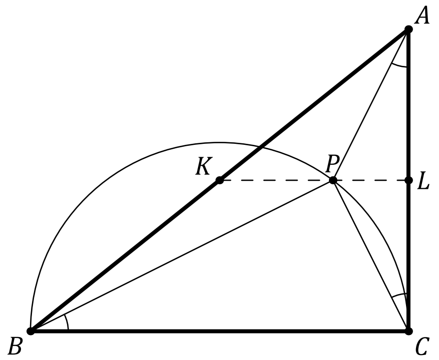
Riešenie:

Keďže KL je stredná priečka trojuholníka ABC, platí $KL \parallel BC$. Vďaka predpokladu $BC \perp AC$ to znamená, že rovnako $KL \perp AC$. Priamka KL tak je osou úsečky AC, lebo je na ňu kolmá a prechádza jej stredom L. Preto platí $|PA| = |PC|$. Z rovnoramenného trojuholníka ACP so základňou AC preto s prihliadnutím na pravý uhol BCA vyplýva

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle BCP| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP|.$$

Ďalej si všimneme, že podľa Tálesovej vety má trojuholník BCP pravý uhol pri vrchole P, preto platí $|\sphericalangle PBC| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP|$.

Dokopy dostávame, že uhly PAC a PBC majú rovnakú veľkosť, a tým je ich zhodnosť dokázaná.



Poznámka:

Obe časti postupu je možné vyložiť aj v opačnom poradí: Najprv z pravouhlého trojuholníka BCP získať vyjadrenie

$$|\sphericalangle PBC| = 90^\circ - |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle PCA|$$

a potom dokázať zhodnosť uhla PAC s uhlom PCA úvahou o osi úsečky AC.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky alebo výsledky nasledovne:

A1 Priamka KL je osou úsečky AC: 2 body so zdôvodnením, 1 bod bez zdôvodnenia.

A2 Odvodenie rovnosti $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA|$: 3 body. Ak pritom chýba zdôvodnenie použitého poznatku A1, dajte len 2 body.

B1 Rovnosť $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$ z Tálesovej vety: 1 bod.

B2 Odvodenie rovnosti $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCA|$: 3 body.

Celkovo potom dajte súčet maxima z bodov z A1 a bodov z A2 a maxima z bodov z B1 a bodov z B2.

---

3 Na tabuli boli napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každom kroku sme dve čísla zotreli a nahradili druhou mocninou ich rozdielu. Ak po nanajvýš 7 krokoch zostali na tabuli všetky čísla rovnaké, mohli to byť čísla

a) nepárne,

b) párne?

(Radek Horenský)

Riešenie:

Ak zotrieme (v jednom kroku) dve čísla párne, budú nahradené jedným párnym číslom. Ak zotrieme dve čísla nepárne, budú tiež nahradené párnym číslom. Ak však zotrieme jedno číslo párne a jedno číslo nepárne, budú nahradené nepárnym číslom. Preto sa celkový počet čísel po každom kroku zmenší o 1 jedným z dvoch spôsobov:

(i) Počet párnych čísel sa zmenší o 1 a počet nepárnych čísel sa nezmení.

(ii) Počet párnych čísel sa zväčší o 1 a počet nepárnych čísel sa zmenší o 2.

Najprv odpovieme záporne na časť b) zadanej otázky. Keďže na začiatku je na tabuli 5 nepárnych čísel, zostane ich počet podľa (i) a (ii) vždy nepárny, takže sa nikdy nebude rovnať 0. (Jednoduchšie možno konštatovať, že počet nepárnych čísel bude vždy 5, 3 alebo 1.)

Na to, aby sme ukázali, že odpoveď na časť a) je kladná, stačí uviesť jeden príklad postupnosti najviac 7 krokov, po ktorých zostane na tabuli len niekoľko rovnakých nepárnych čísel. Po 4 krokoch zostane na tabuli 5 jednotiek napríklad využitím rovností

$$(9-8)^2 = (7-6)^2 = (5-4)^2 = (3-2)^2 = 1.$$

1. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \underline{8}, \underline{9}) \to (\underline{1}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$,
2. $(1, 1, 2, 3, 4, 5, \underline{6}, \underline{7}) \to (\underline{1}, 1, 1, 2, 3, 4, 5)$,
3. $(1, 1, 1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}) \to (\underline{1}, 1, 1, 1, 2, 3)$,
4. $(1, 1, 1, 1, \underline{2}, \underline{3}) \to (\underline{1}, 1, 1, 1, 1)$.

Mohli to teda byť čísla nepárne, nie však čísla párne.

Poznámka:

Iný spôsob, pri ktorom získame tri rovnaké nepárne čísla, je takýto:

1. $(1, \underline{2}, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, 8, 9) \to (1, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, 8, 9)$,
2. $(\underline{1}, \underline{3}, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \to (\underline{4}, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$,
3. $(4, 4, \underline{5}, \underline{6}, 7, 8, 9) \to (\underline{1}, 4, 4, 7, 8, 9)$,
4. $(1, 4, 4, \underline{7}, \underline{8}, 9) \to (1, \underline{1}, 4, 4, 9)$,
5. $(1, \underline{1}, \underline{4}, 4, 9) \to (1, 4, \underline{9}, 9)$,
6. $(\underline{1}, \underline{4}, 9, 9) \to (\underline{9}, 9, 9)$.

Poznámka:

Pre zaujímavosť vysvetlíme, že musí ísť o postupnosť 4 alebo 6 krokov: Všimneme si, že na začiatku sú na tabuli 4 párne čísla. Na zotretie všetkých párnych čísel tak potrebujeme aspoň 4 kroky. Navyše však počet párnych čísel po každom kroku zmení podľa (i) a (ii) svoju paritu, takže k ich počtu rovnému 0 môže dôjsť len po párnom počte krokov. Z počtov od 4 do 7 tak prichádzajú do úvahy iba počty 4 a 6.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte čiastkové kroky nasledovne.

A1 Možné zmeny počtu nepárnych čísel na tabuli po každom kroku: 1 bod.

A2 Pozorovanie, že počet nepárnych čísel na tabuli má stálu paritu: 2 body.

A3 Zdôvodnenie, že nikdy na tabuli nezostanú len párne čísla (stačí uviesť, že počet nepárnych čísel bude vždy 5, 3 alebo 1): 3 body.

B Príklad najviac 7 krokov, po ktorých zostanú na tabuli rovnaké čísla: 3 body.

Celkovo potom dajte súčet maxima z A1, z A2 a z A3 a počtu bodov z B.