MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$2x + \lfloor y \rfloor = 2022,$$
$$3y + \lfloor 2x \rfloor = 2023.$$

($\lfloor a \rfloor$ označuje *(dolnú) celú časť* reálneho čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako a. Napr. $\lfloor 1{,}9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$.)

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Keďže $\lfloor y \rfloor$ a 2022 sú celé čísla, z rovnice $2x + \lfloor y \rfloor = 2022$ vyplýva, že číslo $2x$ je tiež celé, teda platí $\lfloor 2x \rfloor = 2x$. Tým pádom zo zadanej sústavy eliminujeme neznámu x, keď odpočítame prvú rovnicu od druhej. Dostaneme

$$3y - \lfloor y \rfloor = 1.$$

Vďaka tomu je $3y$ celé číslo, takže má (podľa svojho zvyšku po delení tromi) jedno z vyjadrení $3k$, $3k + 1$ alebo $3k + 2$, kde k je celé číslo. Odtiaľ (po vydelení tromi) vychádza, že pre číslo y platí buď $y = k$, alebo $y = k + \frac{1}{3}$, alebo $y = k + \frac{2}{3}$, pričom $k = \lfloor y \rfloor$. Tieto tri možnosti teraz rozoberieme:

- V prípade $y = k$ dostávame rovnicu $3k - k = 1$, z ktorej $k = \frac{1}{2}$, čo je spor.
- V prípade $y = k + \frac{1}{3}$ dostávame rovnicu $(3k + 1) - k = 1$ z ktorej $k = 0$, a potom $y = \frac{1}{3}$. Pôvodná sústava rovníc je potom zrejme splnená práve vtedy, keď $2x = 2022$, čiže keď $x = 1011$.
- V prípade $y = k + \frac{2}{3}$ dostávame rovnicu $(3k + 2) - k = 1$ z ktorej $k = -\frac{1}{2}$, čo je spor.

Jediným riešením zadanej sústavy rovníc je teda $(1011, \frac{1}{3})$.

Poznámka:

Odvodenú rovnicu $3y - \lfloor y \rfloor = 1$ možno riešiť aj tak, že y zapíšeme v tvare $k + r$, kde $k = \lfloor y \rfloor$ a číslo r, kde $0 \le r < 1$, je tzv. *zlomková časť* čísla y. Dosadením dostaneme rovnicu $3(k + r) - k = 1$, čiže $2k = 1 - 3r$. Keďže $2k$ je celé číslo deliteľné dvoma a $-2 < 1 - 3r \le 1$, rovnosť týchto čísel nastane v jedinom prípade, keď $2k = 1 - 3r = 0$, čiže keď $k = 0$ a $r = \frac{1}{3}$, t. j. $y = \frac{1}{3}$.

Riešenie 2:

Podľa definície je $\lfloor a \rfloor$ celé číslo, pričom $\lfloor a \rfloor \le a$ a zároveň $\lfloor a \rfloor + 1 > a$, t. j. $a - 1 < \lfloor a \rfloor \le a$. Podľa toho z prvej rovnice danej sústavy dostávame

$$2022 \le 2x + y < 2023,$$

podobne z druhej rovnice vychádza

$$2023 \le 3y + 2x < 2024.$$

Získané nerovnosti môžeme skombinovať dvoma spôsobmi. Spojením druhej časti prvej s prvou časťou druhej dostaneme $2x + y < 2023 \le 3y + 2x$, odkiaľ z porovnania krajných výrazov vyplýva $y > 0$. Ak upravíme prvú časť prvej na $2024 \le 2x + y + 2$, tak v spojení s druhou časťou druhej dostaneme $3y + 2x < 2024 \le 2x + y + 2$, takže tentoraz z porovnania krajných výrazov vyplýva $y < 1$.

Dokopy nám vyšlo $0 < y < 1$, takže platí $\lfloor y \rfloor = 0$. Vďaka tomu sa prvá rovnica zo zadania redukuje na tvar $2x = 2022$, z ktorého $x = 1011$. Dosadením do druhej zadanej rovnice dostaneme rovnicu $3y + 2022 = 2023$, z ktorej $y = \frac{1}{3}$, čo skutočne spĺňa podmienku $\lfloor y \rfloor = 0$ použitú v prvej rovnici. Dvojica $(1011, \frac{1}{3})$ je preto jediným riešením zadanej sústavy rovníc.

Poznámka:

Odvodenie rovnosti $\lfloor y \rfloor = 0$ je možné urýchliť tak, že prvú zadanú rovnicu odpočítame od druhej a výsledok toho odčítania zapíšeme v tvare

$$2y = 1 + (2x - \lfloor 2x \rfloor) - (y - \lfloor y \rfloor)\,.$$

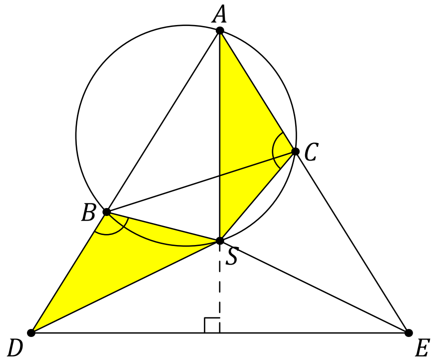
Keďže v oboch okrúhlych zátvorkách napravo sú čísla z intervalu $[0, 1)$, má zrejme celá pravá strana hodnotu z intervalu $(0, 2)$. Platí teda $0 < 2y < 2$, t. j. $0 < y < 1$, odkiaľ už vyplýva $\lfloor y \rfloor = 0$.

2 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Na polpriamkach opačných k BA a CA ležia postupne body D a E tak, že $|BD| = |AC|$ a $|CE| = |AB|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku ADE leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Keďže úsečky AE, AD majú podľa zadania rovnakú dĺžku $|AB| + |AC|$, trojuholník AED je rovnoramenný so základňou ED. Znamená to, že os úsečky ED splýva s osou uhla BAC. Nech S je priesečník tejto osi s kružnicou opísanou trojuholníku ABC rôzny od A. Stačí dokázať, že S je stred kružnice opísanej trojuholníku AED. Keďže bod S leží na osi strany ED, platí $|SE| = |SD|$. Zostáva preto dokázať, že $|SA| = |SD|$.



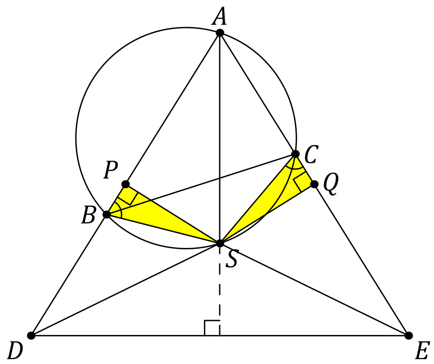
Zo zhodnosti obvodových uhlov SAB a SAC vyplýva, že bod S je stredom oblúka BC, a teda $|BS| = |CS|$. Okrem toho z tetivového štvoruholníka $ABSC$ máme $|\sphericalangle ACS| = 180° - |\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle DBS|$. Dokopy s rovnosťou $|CA| = |BD|$ dostávame, že trojuholníky SAC a SDB sú zhodné podľa vety *sus*, a preto skutočne platí $|SA| = |SD|$.

Riešenie 2:

Definujme bod S ako v prvom riešení. Tentoraz potrebnú rovnosť $|SA| = |SD|$ overíme, keď ukážeme, že bod S leží na osi úsečky AD.

V prípade, keď $|AB| = |AC|$, je stredom úsečky AD bod B (podľa konštrukcie bodu D). Stačí teda overiť, že uhol ABS je potom pravý. To však vyplýva z toho, že tetivový štvoruholník $ABSC$ je vtedy zložený z dvoch zhodných trojuholníkov ABS a ACS, má teda uhly pri protiľahlých vrcholoch B a C zhodné, a teda pravé.

V prípade, keď $|AB| \neq |AC|$, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že platí $|AB| > |AC|$. Nech P a Q sú kolmé priemety bodu S postupne na priamky AB, resp. AC. Vďaka predpokladu $|AB| > |AC|$ leží bod P vnútri úsečky AB, zatiaľ čo bod Q leží na polpriamke opačnej k polpriamke CA. V súlade s úvodným odsekom budeme dokazovať, že bod P je stredom úsečky AD.



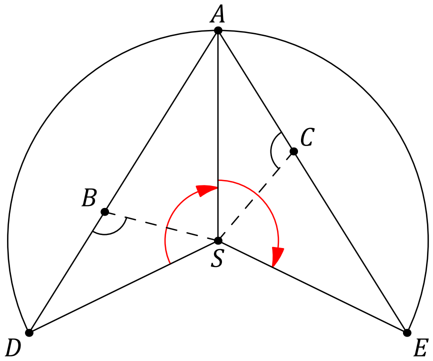
Z tetivového štvoruholníka $ABSC$ vyplýva $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SBA| = 180° - |\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SCQ|$, t. j. vyznačené uhly SBP a SCQ sú zhodné. Vďaka pravým uhlom BPS a CQS sú zhodné aj uhly PSB a QSC. Okrem toho máme $|PS| = |QS|$, pretože S leží na osi uhla DAE. Dostávame tak, že trojuholníky PBS a QCS sú zhodné podľa vety *usu*. Odtiaľ vyplýva rovnosť $|BP| = |CQ|$. Navyše zo zhodných pravouhlých trojuholníkov ASP a ASQ ešte máme $|AP| = |AQ|$, takže spolu vychádza

$$|AP| = |AQ| = |AC| + |CQ| = |DB| + |BP| = |DP|.$$

Bod P je teda skutočne stredom úsečky AD, ako sme mali dokázať.

Riešenie 3:

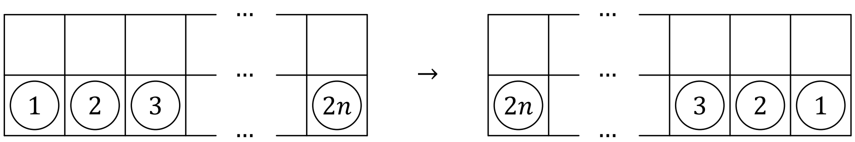
Tentoraz označíme S stred kružnice opísanej trojuholníku AED a budeme dokazovať, že body A, B, S, C ležia na jednej kružnici. Podľa úvodu prvého riešenia vieme, že AED je rovnoramenný trojuholník so základňou ED, teda stred S kružnice jemu opísanej leží na osi uhla DAE, čiže BAC. Body B a C preto ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AS, stačí teda overiť rovnosť $|\sphericalangle ABS| = 180° - |\sphericalangle ACS|$.



Z rovností $|AD| = |AE|$ a $|AS| = |DS| = |ES|$ vyplýva, že trojuholníky DAS a AES sú rovnoramenné a zhodné podľa vety *sss*. Trojuholník DAS sa tak v otočení so stredom S o orientovaný uhol DSA zobrazí na trojuholník AES. Keďže B leží na strane DA, C leží na strane AE a pritom podľa zadania platí $|DB| = |AC|$, spomínané otočenie zobrazuje B na C, a teda uhol DBS na uhol ACS. Preto platí $|\sphericalangle DBS| = |\sphericalangle ACS|$, odkiaľ už vyplýva $|\sphericalangle ABS| = 180° - |\sphericalangle DBS| = 180° - |\sphericalangle ACS|$, čo sme chceli ukázať.

---

3 Pre dané kladné celé číslo n uvažujme obdĺžnikový hrací plán $2n \times 2$ a na ňom $2n$ žetónov očíslovaných 1, 2, …, $2n$ a rozmiestnených ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné posunúť jeden žetón z jeho políčka na políčko susediace stranou, pokiaľ je prázdne.[1] Najmenej koľkými ťahmi možno z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo?



(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Ukážeme, že najmenší potrebný počet ťahov je rovný $2n^2 + 4n - 2$.

Budeme rozlišovať ťahy *vodorovné* a ťahy *zvislé* – podľa toho, či je žetón posúvaný v riadku alebo v stĺpci. Potrebné počty vodorovných a zvislých ťahov odhadneme oddelene.

Začneme s vodorovnými ťahmi. Rovnako ako žetóny označme aj stĺpce hracieho plánu zľava doprava číslami 1 až $2n$. Žetón 1 je na začiatku v stĺpci 1 a na konci má byť v stĺpci $2n$, musíme s ním preto vykonať aspoň $2n - 1$ ťahov doprava. Všeobecne žetón k sa dostane zo stĺpca k nakoniec do stĺpca $2n + 1 - k$, a tak v prípade $k \leq n$ je na to potrebných aspoň $2n + 1 - 2k$ ťahov doprava, zatiaľ čo v prípade $k > n$ aspoň $2k - 2n - 1$ ťahov doľava. Pre celkový počet v vodorovných ťahov preto platí

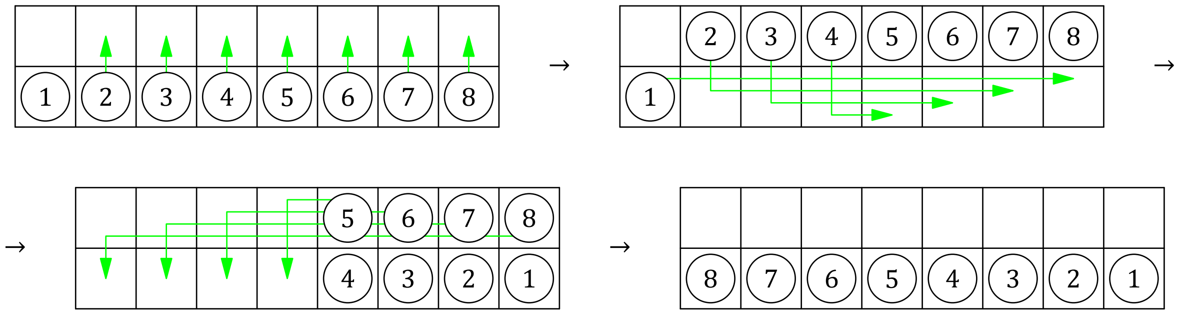
$$v \geq \underbrace{(2n-1) + (2n-3) + \cdots + 1}_{\text{za žetóny 1 až } n} + \underbrace{1 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)}_{\text{za žetóny } n+1 \text{ až } 2n} = 2\left(1 + 3 + \cdots + (2n-1)\right) = 2n^2.$$

Teraz sa zamerajme na zvislé ťahy. Žetón nazveme *lenivým*, ak zostane po celý čas v dolnom riadku. Ostatným žetónom hovorme *akčné*. Všimnime si, že najviac jeden žetón môže byť lenivý – každé dva žetóny sú totiž v dolnom riadku nakoniec v opačnom poradí, ako boli na začiatku. Keby teda oba boli lenivé, museli by niekedy stáť na rovnakom políčku, čo nie je možné. Akčných žetónov je teda aspoň $2n - 1$ a s každým z nich boli vykonané aspoň 2 zvislé ťahy – najskôr nahor a neskôr nadol. Zvislých ťahov celkom preto musí byť aspoň $2 \cdot (2n - 1)$ čiže $4n - 2$.

Dokopy dostávame, že na splnenie úlohy potrebujeme aspoň $2n^2 + 4n - 2$ ťahov. V druhej časti riešenia ukážeme, že tento počet ťahov skutočne stačí.

Jeden možný postup ilustrujeme pre prípad $n = 4$.

[1] Hru si môžete vyskúšať na https://skmo.sk/72a3.



Najskôr teda všetkých $2n$ žetónov okrem prvého presunieme do horného riadka. Potom presunieme žetón 1 po dolnom riadku z prvého stĺpca do posledného. Následne presunieme postupne žetóny 2 až n – každý z nich najprv do dolného riadka a vzápätí doprava na posledné voľné políčko (ktoré je jeho cieľové). Na záver presunieme postupne žetóny $n+1$ až $2n$ – každý najskôr doľava na políčko jeho cieľového stĺpca a vzápätí do spodného riadka.

Pri práve opísanom postupe zodpovedajú počty zvislých aj vodorovných ťahov presne tým odhadom, ktoré sme odvodili v prvej časti riešenia: Zvislých ťahov sme urobili práve $4n-2$ a ani vodorovných ťahov sme so žiadnym žetónom nevykonali viac, než bolo skôr udané za nutné. Celkový počet ťahov pri opísanom postupe je teda skutočne $2n^2+4n-2$.

---

4 Sú dané dve nepárne prirodzené čísla k a n. Na tabuli je pre každé dve prirodzené čísla i, j spĺňajúce $1 \le i \le k$ a $1 \le j \le n$ napísaný zlomok $\frac{i}{j}$. Určte také reálne číslo q, že ak všetky zlomky na tabuli zoradíme podľa hodnoty od najmenšieho po najväčší (zlomky s rovnakou hodnotou v ľubovoľnom poradí), uprostred tohto zoznamu bude zlomok s hodnotou q.

(Martin Melicher)

Riešenie 1:

Ukážeme, že hľadané q má hodnotu $\frac{k+1}{n+1}$. V celom riešení bude q označovať práve toto číslo.

Keďže dané čísla n a k sú nepárne, zlomok s hodnotou q je na tabuli skutočne zapísaný – napríklad to je zlomok

$$\frac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Podľa porovnania s číslom q povieme, že nejaký zlomok je

- *malý*, ak je jeho hodnota menšia ako q,
- *stredný*, ak je jeho hodnota rovná q,
- *veľký*, ak je jeho hodnota väčšia ako q.

Počet $k \cdot n$ všetkých zapísaných zlomkov je nepárny. Aby sme ukázali, že pri ich usporiadaní podľa veľkosti bude mať prostredný zlomok hodnotu q, stačí dokázať, že malých zlomkov je na tabuli práve toľko ako veľkých. (Posledné bude tiež znamenať, že počet stredných zlomkov je nepárny, čo znovu potvrdí ich existenciu.)

Zlomky zapísané na tabuli popárujeme – každý zlomok $\frac{i_1}{j_1}$ dáme do dvojice so zlomkom $\frac{i_2}{j_2}$ (a naopak) práve vtedy, keď bude $i_2 = k+1-i_1$ a $j_2 = n+1-j_1$, čo možno skutočne prepísať symetricky ako $i_1+i_2 = k+1$ a $j_1+j_2 = n+1$. Uvedomme si, že nerovnosti $1 \le i_1 \le k$ a $1 \le j_1 \le n$ zrejme platia práve vtedy, keď platí $1 \le i_2 \le k$ a $1 \le j_2 \le n$. (Práve tieto celočíselné nerovnosti určujú množinu zlomkov zapísaných ako $\frac{i_1}{j_1}$, resp. $\frac{i_2}{j_2}$.) Je zrejmé, že iba spomínaný zlomok

$$\frac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(n+1)}$$

je takto „spárovaný“ sám so sebou a že všetky ostatné zapísané zlomky sú skutočne rozdelené do dvojíc. Ak ďalej ukážeme, že v každej takej dvojici je buď jeden malý a jeden veľký zlomok, alebo v nej sú dva stredné zlomky, vyplynie z toho už potrebný záver, že počet malých zlomkov je rovnaký ako počet veľkých zlomkov.

Vďaka spomínanej symetrii stačí overiť, že zlomok $\frac{i}{j}$ je malý práve vtedy, keď je zlomok $\frac{k+1-i}{n+1-j}$ veľký. Overenie pomocou ekvivalentných úprav je rutinné:

$$\frac{k+1-i}{n+1-j} < \frac{k+1}{n+1},$$

$$(k+1-i)(n+1) < (k+1)(n+1-j),$$
$$(k+1)(n+1) - i(n+1) < (k+1)(n+1) - (k+1)j,$$
$$i(n+1) > (k+1)j,$$
$$\frac{i}{j} > \frac{k+1}{n+1}.$$

Tým je celé riešenie hotové.

Poznámka:

Namiesto úprav nerovností v závere riešenia sme mohli vykonať túto úvahu: Zoberme j rovnakých zlomkov $\frac{i}{j}$ a $n+1-j$ rovnakých zlomkov $\frac{k+1-i}{n+1-j}$ – celkom to je $n+1$ zlomkov so súčtom $k+1$, takže ich aritmetický priemer je rovný $\frac{k+1}{n+1}$ čiže q. Keďže sme však priemerovali najviac dve rôzne hodnoty, išlo buď o jedinú hodnotu q, alebo o jednu hodnotu menšiu ako q a jednu hodnotu väčšiu ako q.

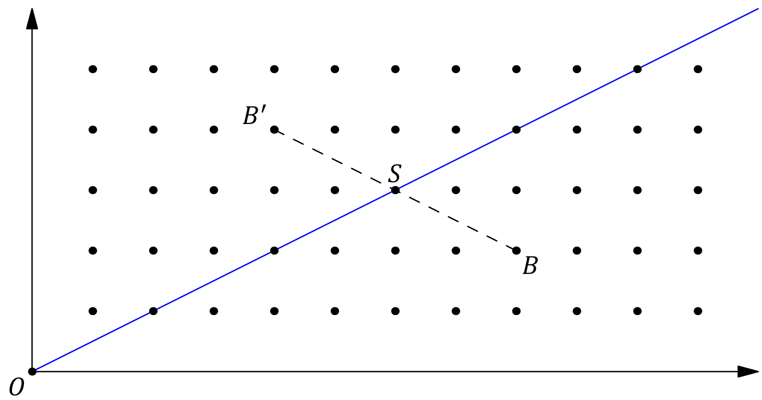
Motiváciu pre zvolené párovanie zlomkov $\frac{i}{j}$ a $\frac{k+1-i}{n+1-j}$ poskytuje nasledujúce užitočné pravidlo: Pre ľubovoľnú štvoricu reálnych čísel a, b, c, d, pričom $b > 0$ a $d > 0$, platí implikácia

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Pri označení z nášho riešenia totiž stačí len rozlíšiť, ktorý z dvoch zlomkov $\frac{i}{j}$ a $\frac{k+1-i}{n+1-j}$ má menšiu hodnotu, a podľa toho uplatniť uvedenú implikáciu. Dostaneme tak, že zlomok s menšou hodnotou je skutočne malý a zlomok s väčšou hodnotou je skutočne veľký.

Riešenie 2:

Na úlohu sa pozrieme geometricky – využijeme na to rovinu s karteziánskou sústavou súradníc s počiatkom O. V nej každý zlomok $\frac{i}{j}$, ktorý je zapísaný na tabuli, znázorníme ako bod (j, i). (Dôvodom na takúto zmenu poradia čísel i a j je, že hodnota dotyčného zlomku $\frac{i}{j}$ sa rovná smernici priamky, ktorá spája počiatok $(0,0)$ práve s bodom (j, i).) Dostaneme tak práve tie body (j, i) našej roviny, pre ktoré platí $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Množinu týchto bodov, ktorú sme na obrázku vykreslili pre prípad $n = 11$ a $k = 5$, označíme M a budeme jej ďalej hovoriť „mriežka". Má tvar obdĺžnika s vrcholmi $(1, 1)$, $(n, 1)$, (n, k), $(1, k)$. Keďže čísla n, k sú nepárne, stred S tohto obdĺžnika celočíselné súradnice je $\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(k+1)\right)$. Stred S je tak sám bodom mriežky M. Dodajme ešte, že priamka OS má smernicu $\frac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(n+1)}$ a že hodnotu tohto zlomku rovnako ako v prvom riešení označíme q aj v závere tohto riešenia.



Všimnime si, že podľa stredu S je súmerný nielen spomínaný obdĺžnik, ale súmerná je aj samotná mriežka M (na obrázku sme vyznačili jej dva súmerne združené body B a B'). (K tomuto tvrdeniu, ktoré možno považovať za zrejmé, sa ešte vrátime v poznámke za riešením.) Ak teda zostrojíme priamku OS, bude vo vnútri každej z oboch vyťatých polrovín ležať rovnaký počet bodov z M. Objasnime, čím sa tieto rovnako početné skupiny bodov „pod priamkou OS" a „nad priamkou OS" líšia.

Bod (j, i) mriežky M leží pod priamkou OS práve vtedy, keď má priamka OB menšiu smernicu ako priamka OS, t. j. práve vtedy, keď platí $\frac{i}{j} < q$. Pod priamkou OS teda ležia práve tie body (j, i) mriežky M, ktoré zodpovedajú *malým* zlomkom $\frac{i}{j}$, ako sme im hovorili v prvom riešení. Podobne body mriežky M nad priamkou OS zodpovedajú *veľkým* zlomkom. Tak sme znovu overili potrebné tvrdenie, že malých aj veľkých zlomkov je rovnaký počet.

Poznámka:

V druhom riešení sme využili súmernosť so stredom S. Tá zobrazí každý bod (j, i) na bod (j', i'), pričom (ako je známe z analytickej geometrie) platí $j' = 2\left(\frac{1}{2}(n+1)\right) - j$ a $i' = 2\left(\frac{1}{2}(k+1)\right) - i$, t. j. $j + j' = n + 1$ a $i + i' = k + 1$. Vidíme, že párovanie zlomkov z prvého riešenia je vyjadrením súmernej združenosti bodov mriežky M z druhého riešenia.

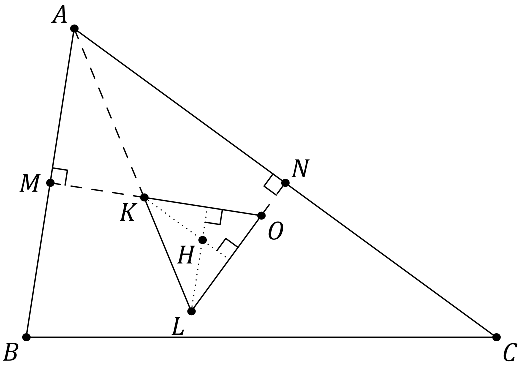
---

5 Daný je ostrouhlý rôznostranný trojuholník ABC. Os vnútorného uhla pri vrchole A a osi strán AB, AC vymedzujú trojuholník. Dokážte, že priesečník jeho výšok leží na ťažnici z vrcholu A.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Nech v danom trojuholníku ABC je M stred strany AB, N stred strany AC, K a L priesečníky osi uhla CAB postupne s osami strán AB a AC, ktorých priesečník je označený O. Trojuholník KLO je teda tým trojuholníkom, o ktorom je reč v zadaní úlohy. Priesečník jeho výšok označíme H. Všetky pomenované body sú vyznačené na obrázku nakreslenom pre prípad $|AB| < |AC|$. (Prípad $|AB| > |AC|$ vyzerá analogicky, prípad $|AB| = |AC|$ je zadaním vylúčený – body K, L, O vtedy splývajú v jeden bod.)



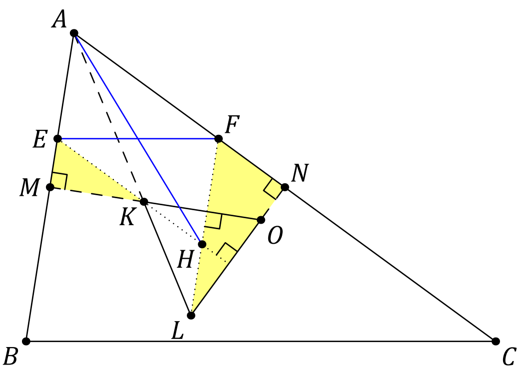
Podľa zadania máme dokázať, že bod H leží na ťažnici z vrcholu A trojuholníka ABC, t. j., ekvivalentne, že trojuholníky ABH a ACH majú rovnaký obsah.

Vďaka tomu, že $HL \perp OK \perp AB$, platí $HL \parallel AB$. Bod H tak má od priamky AB rovnakú vzdialenosť ako bod L. Tá je však rovná dĺžke úsečky LN, pretože bod L leží na osi uhla CAB a N je kolmý priemet L na AC. Dokopy dostávame, že obsah prvého trojuholníka ABH je rovný $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |LN|$. Analogicky zistíme, že obsah druhého trojuholníka ACH je rovný $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |KM|$. Zostáva tak dokázať rovnosť $|AB| \cdot |LN| = |AC| \cdot |KM|$.

Pre body K a L, ležiace na osi uhla CAB, platí $|\sphericalangle MAK| = |\sphericalangle NAL|$. Pravouhlé trojuholníky AKM a ALN sú teda podobné podľa vety *uu*, a preto platí $|KM| : |AM| = |LN| : |AN|$. Odtiaľ vzhľadom na $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$ dostávame $|KM| : |AB| = |LN| : |AC|$, čiže $|AB| \cdot |LN| = |AC| \cdot |KM|$, ako sme potrebovali dokázať.

Riešenie 2:

Okrem bodov z prvého riešenia uvážime ešte priesečník E priamok AB, KH a F priesečník priamok AC, LH. Opäť si všimnime, že platí $KH \parallel AC$ a $LH \parallel AB$, takže štvoruholník $AEHF$ je rovnobežník.



Znovu využijeme aj podobnosť trojuholníkov AKM a ANL, podľa ktorej platí $|KM| : |LN| = |AM| : |AN| = |AB| : |AC|$. Zhodnosť vonkajších uhlov pri vrcholoch E, F rovnobežníka $AEHF$ znamená, že $|\sphericalangle KEM| = |\sphericalangle LFN|$. Podobné sú tak aj pravouhlé trojuholníky EKM a FLN, odkiaľ vyplýva $|EM| : |FN| = |KM| : |LN| = |AB| : |AC|$.

Preto platí

$$\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|AM| - |EM|}{|AN| - |FN|} = \frac{\frac{|AB|}{|AC|} \cdot |AN| - \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |FN|}{|AN| - |FN|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

teda trojuholníky AEF a ABC sú podobné podľa vety *sus* (zhodujú sa v uhle pri vrchole A a v pomere priľahlých strán). Dostávame tak $EF \parallel BC$.

Keďže v rovnobežníku $AEHF$ priamka AH rozpoľuje uhlopriečku EF, rozpoľuje táto priamka aj úsečku BC, ktorá je s úsečkou EF rovnoľahlá podľa stredu A. Inak povedané, bod H leží na ťažnici z vrcholu A trojuholníka ABC, ako sme mali dokázať.

---

6 Uvažujme postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanú nasledovne:

- $a_0 = 3$.
- Ak n je nezáporné celé číslo, tak $a_{n+1} = a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - 1$.

a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen tejto postupnosti.

b) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel nedeliacich žiadny člen tejto postupnosti.

(Martin Melicher)

Riešenie:

a) Matematickou indukciou najskôr dokážeme, že pre každé n platí $a_n \geq 2$. Podľa zadania $a_0 = 3$ a $a_1 = a_0 - 1 = 2$. Predpokladajme teraz, že pre niektoré n také, že $n \geq 2$, nerovnosť $a_k \geq 2$ platí pre každé k menšie ako n. Podľa zadania potom máme $a_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n - 1 \geq a_0 a_1 - 1 = 5$, takže skutočne $a_n \geq 2$.

Ukážme teraz, že všetky členy a_n sú navzájom nesúdeliteľné čísla. Pre ľubovoľné dva indexy k a n také, že $k < n$, totiž platí $a_k \mid a_0 a_1 \dots a_{n-1} = a_n + 1$, odkiaľ pre najväčší spoločný deliteľ D čísel a_n a a_k dostávame $D \mid a_n$ a zároveň $D \mid a_n + 1$ (pretože $D \mid a_k$ a $a_k \mid a_n + 1$), takže $D \mid 1$, a teda $D = 1$.

Vzhľadom na $a_n \geq 2$ nájdeme pre každý index n prvočíslo, označme ho p_n, pre ktoré $p_n \mid a_n$. Vďaka tomu, že všetky a_n sú navzájom nesúdeliteľné, všetky nájdené prvočísla p_n sú navzájom rôzne. Tvrdenie z časti a) je tak dokázané.

b) Ak n je kladné celé číslo, tak $a_{n+1} = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n - 1 = (a_n + 1)a_n - 1 = a_n^2 + a_n - 1$. Ďalej budeme pracovať s týmto vyjadrením.

Predpokladajme, že platí $p \mid a_n$ pre nejaké kladné celé n a pre nejaké prvočíslo p. Potom $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 \equiv -1 \pmod{p}$. Odtiaľ dostávame $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 \equiv (-1)^2 + (-1) - 1 \equiv -1 \pmod{p}$, a analogicky matematickou indukciou dochádzame k záveru, že všetky členy a_k, kde $k \geq n+1$, dávajú po delení p rovnaký zvyšok $p - 1$. Ak uvedený predpoklad $p \mid a_n$ bude pre nejaké kladné n splnený, toto prvočíslo p nazveme *zlé*. Našou úlohou je vlastne nájsť nekonečne veľa prvočísel p takých, že $p \geq 5$, ktoré nie sú zlé (podmienku $p \geq 5$ kladieme, aby neplatilo $p \mid a_0 = 3$).

Majme teraz prvočíslo p s vlastnosťou, že pre nejaké kladné n platí $a_n \equiv 1 \pmod{p}$. Potom $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{p}$, takže analogicky matematickou indukciou dostávame, že všetky členy a_k, kde $k \geq n$, dávajú po delení p zvyšok 1. Vtedy dané p nazveme *dobré*. Všimnime si, že žiadne prvočíslo $p \geq 5$ nemôže byť dobré aj zlé zároveň – nie je totiž možné, aby pre nejaké k platilo $a_k \equiv 1 \pmod{p}$ aj $a_k \equiv -1 \pmod{p}$. Preto nám stačí dokázať, že existuje nekonečne veľa dobrých prvočísel.

Na hľadanie dobrých prvočísel využijeme postupnosť $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ zadanú predpisom $b_n = a_n - 1$ pre každé n. Zrejme $b_0 = 2$, $b_1 = 1$ a pre každé kladné n platí

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = (a_n^2 + a_n - 1) - 1 = ((b_n + 1)^2 + (b_n + 1) - 1) - 1 = b_n^2 + 3b_n = b_n(b_n + 3).$$

Prvočíslo p je potom dobré práve vtedy, keď $p \mid b_n$ pre nejaké kladné n. Dostali sme sa tak k situácii podobnej tej, ktorú sme riešili v časti a) – potrebujeme dokázať existenciu nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen novej postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ určenej prvým členom $b_1 = 1$ a vzťahom $b_{n+1} = b_n(b_n + 3)$ pre každé kladné n.

Začneme povšimnutím, že ak $1 \leq k \leq n$, tak $b_k \mid b_n$. Skutočne z $b_{k+1} = b_k(b_k + 3)$ máme $b_k \mid b_{k+1}$ a analogicky indukciou $b_k \mid b_n$ pre každé n také, že $n \geq k$.

Teraz dokážeme, že za predpokladu $1 \leq k < n$ sú čísla $b_k + 3$ a $b_n + 3$ nesúdeliteľné. Ich najväčší spoločný deliteľ D totiž spĺňa $D \mid b_k + 3 \mid b_{k+1} \mid b_n$ a zároveň $D \mid b_n + 3$, takže spolu $D \mid (b_n + 3) - b_n = 3$, a preto buď $D = 1$, alebo $D = 3$. Zostáva vylúčiť hodnotu $D = 3$: Vzhľadom na vzťah $b_1 = 1$ vyplýva z $b_{n+1} = b_n(b_n + 3)$ indukciou $b_n \equiv 1 \pmod{3}$ pre každé kladné n, takže $3 \nmid b_n$, a preto tiež $3 \nmid b_n + 3$, a teda $D \neq 3$.

Napokon vieme, že $b_n \geq 1$ pre každé n (lebo $a_n \geq 2$), a teda $b_n + 3 \geq 4$. Pre každé n tak nájdeme prvočíslo p_n s vlastnosťou $p_n \mid b_n + 3$. Všetky tieto prvočísla p_n sú podľa predchádzajúceho odseku navzájom rôzne, navyše z $b_n + 3 \mid b_{n+1}$ vyplýva (pre nás kľúčový) vzťah $p_n \mid b_{n+1}$ pre každé kladné n. Našli sme teda potrebnú nekonečnú postupnosť prvočísel deliacich aspoň jeden člen postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Dôkaz tvrdenia z časti b) je ukončený.

Poznámka:

Ukážeme, že tvrdenie z časti a) možno tiež dokázať sporom. Pripusťme teda, že všetkých prvočísel, ktoré delia niektorý člen postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, je konečný počet – označme ich p_1, …, p_k. Nech r je najmenší index taký, že medzi deliteľmi členov a_0, …, a_r sú všetky prvočísla p_1, …, p_k. Potom však číslo a_{r+1} čiže $a_0 a_1 \dots a_r - 1$, nie je deliteľné žiadnym z týchto prvočísel, a to je (vzhľadom na nerovnosť $a_{r+1} \geq 2$ z úvodu riešenia) spor.