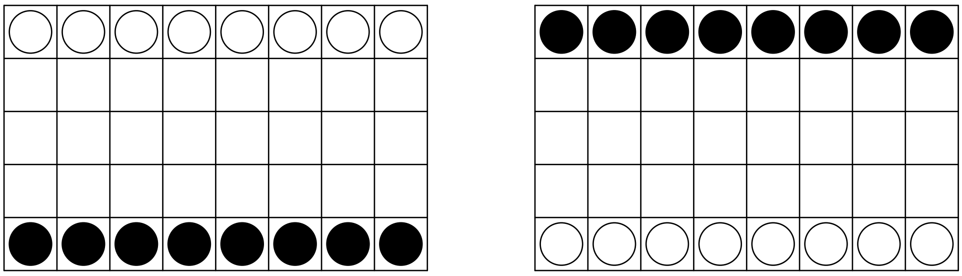
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1 Na hracom pláne 8×5 je rozmiestnených 8 bielych a 8 čiernych žetónov ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné posunúť žetón na prázdne políčko susediace stranou. Určte najmenší počet ťahov, ktorými možno z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo.



(Josef Tkadlec)

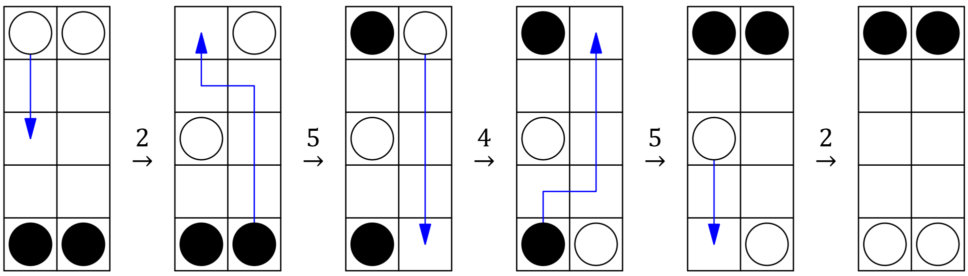
Riešenie:

V prvej časti dokážeme, že na splnenie úlohy je vždy potrebných aspoň 64 ťahov vo zvislom smere a aspoň 8 ťahov vo vodorovnom smere, celkovo teda aspoň $64 + 8$ čiže 72 ťahov.

Je zrejmé, že s každým z 8 bielych žetónov musíme ťahať aspoň 4-krát smerom nadol a s každým z 8 čiernych žetónov aspoň 4-krát smerom nahor. Celkovo tak musíme naozaj urobiť aspoň $8 \cdot 4 + 8 \cdot 4$ čiže 64 ťahov vo zvislom smere.

V každom stĺpci hracieho plánu na začiatku leží jeden biely žetón nad jedným čiernym žetónom, na konci je to naopak. Aspoň jeden z týchto dvoch žetónov musí teda svoj stĺpec v niektorom ťahu opustiť, t. j. posunúť sa vo vodorovnom smere. Keďže to platí pre každý z 8 stĺpcov, musíme naozaj vykonať aspoň 8 ťahov vo vodorovnom smere.

V druhej časti riešenia ukážeme, že 72 ťahov na splnenie úlohy stačí. Rozdeľme hrací plán na 4 časti 2×5 a v každej z nich presunieme žetóny použitím $2 + 5 + 4 + 5 + 2$ čiže 18 ťahov v piatich etapách znázornených na obrázku.



Celkovo to potom bude naozaj $4 \cdot 18$ čiže 72 ťahov.

Poznámka:

Dokážeme, že každé riešenie zadanej úlohy 72 ťahmi má nasledujúcu vlastnosť: *Všetky vykonané ťahy možno rozdeliť do 4 skupín po 18 ťahoch tak, že ťahy z tej istej skupiny (v pôvodnom poradí) riešia „redukciu" zadanej úlohy na jednu zo štyroch častí* 2×5, *na ktoré je celý plán* 8×5 *rozdelený.* Na to je nutné a súčasne stačí ukázať, že žiadny žetón v priebehu daných 72 ťahov neopustí tú zo spomínaných častí 2×5, v ktorej sa pôvodne nachádzal. Určite si pritom stačí všímať len ťahy vo vodorovnom smere

Označme stĺpce hracieho plánu číslami 1 až 8 zľava doprava. Nech $i \to i + 1$, resp. $i \to i - 1$ označuje vodorovný ťah zo stĺpca i doprava, resp. doľava. Stačí teda ukázať, že 8 vodrovných ťahov z každého riešenia 72 ťahmi má (v niektorom poradí) tvar $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 4$, $4 \to 3$, $5 \to 6$, $6 \to 5$, $7 \to 8$, $8 \to 7$. To je však dôsledok tej našej úvahy, podľa ktorej pri *ľubovoľnom riešení* pre každý stĺpec i existuje aspoň jeden vodorovný ťah $i \to *$. Keďže pri riešení 72 ťahmi je vodorovných ťahov práve 8, je v ňom po jednom ťahu $i \to *$ pre každé i, a teda aj po jednom ťahu $* \to i$ pre každé i, pretože počet ťahov *zo* stĺpca i sa musí rovnať počtu ťahov *do* stĺpca i. Ak $i = 1$, tak ide nutne o ťahy $1 \to 2$ a $2 \to 1$, a teda ak $i = 3$, tak ide nutne o ťahy $3 \to 4$ a $4 \to 3$, a teda ak $i = 5$, tak ide nutne o ťahy $5 \to 6$ a $6 \to 5$, a teda ak $i = 7$, tak ide nutne o ťahy $7 \to 8$ a $8 \to 7$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A1 Dôkaz, že je potrebných aspoň 64 zvislých ťahov: 1 bod.

A2 Dôkaz, že je potrebných aspoň 8 vodorovných ťahov: 2 body.

B Popis ľubovoľného minimálneho riešenia (t. j. postupnosti 72 ťahov, ktorá prevedie pôvodné rozostavenie na cieľové): 3 body.

Celkovo potom dajte súčet bodov z A1, z A2 a z B.

---

2 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} = y-2,$$
$$\sqrt{\sqrt{y}+2} = x-2.$$

(Radek Horenský)

Riešenie 1:

Nech (x, y) je ľubovoľné riešenie danej sústavy. Keďže hodnota $\sqrt{\sqrt{x}+2}$ je zrejme kladná, podľa prvej rovnice je nutne $y > 2$. Podobne z druhej rovnice vyplýva $x > 2$.

Teraz dokážeme, že čísla x a y musia byť rovnaké. (Zdôraznime, že len zo symetrie sústavy rovníc rovnosť $x = y$ nevyplýva.) Využijeme na to poznatok, že funkcia *druhá odmocnina* je všade rastúca. V prípade $x > y$ by teda postupne platilo

$$\sqrt{x} > \sqrt{y},$$
$$\sqrt{x}+2 > \sqrt{y}+2,$$
$$\sqrt{\sqrt{x}+2} > \sqrt{\sqrt{y}+2},$$

takže podľa zadania

$$y-2 > x-2,$$
$$y > x,$$

a to je spor. Prípad $x < y$ sa vylúči analogicky. Rovnosť $x = y$ je tak dokázaná.

Pôvodná sústava dvoch rovníc sa vtedy zrejme redukuje na jednu rovnicu

$$\sqrt{\sqrt{x}+2} = x-2.$$

Po substitúcii $s = \sqrt{x}$ prejde táto rovnica na rovnicu

$$\sqrt{s+2} = s^2-2,$$

pričom zrejme $s > \sqrt{2}$. Ekvivalentne upravujme:

$$s+2 = (s^2-2)^2,$$
$$s+2 = s^4-4s^2+4,$$
$$0 = s^4-4s^2-s+2,$$
$$0 = s^2(s^2-4)-(s-2),$$
$$0 = s^2(s+2)(s-2)-(s-2),$$
$$0 = \big(s^2(s+2)-1\big)(s-2).$$

A keďže

$$s^2(s+2)-1 > (\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+2)-1 = 2(\sqrt{2}+2)-1 = 2\sqrt{2}+3 > 0,$$

činiteľ $s^2(s+2)-1$ je kladný, a dostávame tak ekvivalentne

$$0 = s-2,$$
$$2 = s.$$

Platí teda $x = s^2 = 4$.
Zadaná sústava rovníc má teda jediné riešenie $(4, 4)$. Skúška pri tomto postupe nie je potrebná.
Poznámka:
Uveďme druhé možné odvodenie rovnosti $x = y$:
Umocnením oboch rovníc zo zadania na druhú dostávame

$$\sqrt{x} + 2 = (y-2)^2,$$
$$\sqrt{y} + 2 = (x-2)^2.$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (y-2)^2 - (x-2)^2,$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \big((y-2) - (x-2)\big)\big((y-2) + (x-2)\big),$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (y-x)(y+x+4),$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})(y+x+4).$$

Ak by platilo $x \neq y$, tak po vydelení oboch strán nenulovou hodnotou $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ dostaneme

$$-1 = (\sqrt{y} + \sqrt{x})(x+y-4),$$

čo je však spor, lebo oba činitele z pravej strany sú kladné.
Riešenie 2:
Využijeme opäť poznatok, že obe čísla x a y sú väčšie ako 2, a zavedieme funkciu f z $(2, \infty)$ do $(2, \infty)$ predpisom

$$f(t) = \sqrt{t} + 2.$$

Rovnice zo zadania prepísané na tvar

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2 = y,$$
$$\sqrt{\sqrt{y} + 2} + 2 = x$$

potom môžeme pomocou funkcie f zapísať ako sústavu rovníc

$$f\left(f(x)\right) = y,$$
$$f\left(f(y)\right) = x.$$

Vidíme, že jej riešením sú práve dvojice tvaru $(x, f\left(f(x)\right))$, kde

$$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x.$$

Tento vzťah zrejme platí v prípade $f(x) = x$, ukážeme, že inokedy nie. Všimnime si, že funkcia f je rastúca. Vďaka tomu v prípade $f(x) < x$ platí

$$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) < f\left(f\left(f(x)\right)\right) < f\left(f(x)\right) < f(x) < x,$$

a v prípade $f(x) > x$

$$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) > f\left(f\left(f(x)\right)\right) > f\left(f(x)\right) > f(x) > x.$$

Zostáva vyriešiť rovnicu $f(x) = x$, pričom $x > 2$. Ekvivalentne upravujme:

$$f(x) = x,$$
$$\sqrt{x} + 2 = x,$$
$$0 = x - \sqrt{x} - 2,$$
$$0 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1),$$

a keďže $\sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$,

$$0 = \sqrt{x} - 2,$$
$$2 = \sqrt{x},$$

$$4 = x.$$

Zadaná sústava rovníc má teda jediné riešenie $(4, 4)$. Skúška pri tomto postupe nie je potrebná.

Poznámka:

Úvahy o funkcii f z druhého riešenia je možné využiť aj na vyriešenie rovnice $\sqrt{\sqrt{x} + 2} = x - 2$ z prvého riešenia bez prechodu k rovnici štvrtého stupňa. Túto rovnicu totiž možno zapísať ako rovnicu $f\left(f(x)\right) = x$, ktorá je však ekvivalentná s jednoduchšou rovnicou $f(x) = x$, a to vďaka implikáciám

$$f(x) < x \Rightarrow f\left(f(x)\right) < f(x) < x$$

a

$$f(x) > x \Rightarrow f\left(f(x)\right) > f(x) > x,$$

ktoré sa zdôvodnia rovnako ako v druhom riešení. Tam sme zjednodušenú rovnicu $f(x) = x$ aj vyriešili.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A0 Uvedenie podmienok $x > 2$ a $y > 2$: 0 bodov.
- A1 Uhádnutie riešenia $(4, 4)$ so skúškou: 1 bod.
- B1 Dôkaz rovnosti $x = y$: 3 body.
- B2 Vyriešenie úlohy za predpokladu $x = y$ vrátane vylúčenia iných prípadov ako $x = 4$: 3 body.
- C Vyjadrenie sústavy v tvare $f\left(f(x)\right) = y$, $f\left(f(y)\right) = x$: 2 body.
- D1 Odvodenie rovnosti $f(x) = x$ za predpokladu $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x$: 3 body.
- D2 Vyriešenie rovnice $f(x) = x$: 1 bod.
- E1 Vylúčenie rovnosti $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x$ v prípade $f(x) < x$: 2 body.
- E2 Vylúčenie rovnosti $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x$ v prípade $f(x) > x$: 2 body.

Celkovo potom dajte maximum z bodov z A1, zo súčtu bodov z B1 a z B2, zo súčtu bodov z C, z D1 a z D2, a zo súčtu bodov z C, z E1 a z E2.

---

3 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník a P je priesečník jeho uhlopriečok. Nech platí $|AB| = |BC| = |CD|$ a $|\sphericalangle APD| < 90°$. Označme R a S postupne obrazy bodov A a D v osových súmernostiach podľa priamok BD a AC. Dokážte, že úsečky BC a RS sú rovnobežné.

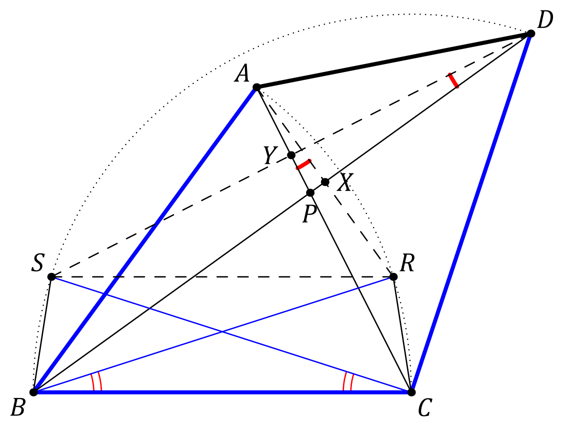
(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Najskôr si všimneme, že zo zadaných súmerností vyplývajú rovnosti $|BR| = |BA|$ a $|CS| = |CD|$. Spolu s rovnosťami zo zadania dostávame

$$|AB| = |BC| = |CD| = |BR| = |CS|.$$

Podľa konštrukcie sú body R, S zrejme rôzne, pritom stred X úsečky AR leží na jej osi BD a stred Y úsečky DS na jej osi AC. V nasledujúcom odseku dokážeme, že bod R leží vnútri uhla ABC a bod S vnútri uhla DCB, ako je to na obrázku. Dokopy to bude znamenať, že body A, D, R, S ležia vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou BC.



Z predpokladu $|\sphericalangle APD| < 90°$ vyplýva $|\sphericalangle APB| > 90°$, čo pre vnútorný bod P základne AC rovnoramenného trojuholníka ABC znamená, že $|\sphericalangle ABP| < \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ABC|$. Odtiaľ však vyplýva $|\sphericalangle ABR| = 2 \cdot |\sphericalangle ABP| < |\sphericalangle ABC|$, teda bod R naozaj leží vnútri uhla ABC. Analogicky z nerovnosti $|\sphericalangle DPC| > 90°$ pre vnútorný bod P základne BD rovnoramenného trojuholníka DCB usúdime, že bod S naozaj leží vnútri uhla DCB.

Ďalším dôsledkom nerovnosti $|\sphericalangle APD| < 90°$ je, že pre vyznačené vnútorné uhly pravouhlých trojuholníkov APX a DPY platí $|\sphericalangle XAP| = 90° - |\sphericalangle APD| = |\sphericalangle YDP|$, čiže $|\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle SDB|$.

Podľa vzťahov $|AB| = |BC| = |BR|$ je bod B stredom kružnice opísanej trojuholníku ARC, ktorý, ako vieme, leží v uhle ABC. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle preto platí $|\sphericalangle RBC| = 2 \cdot |\sphericalangle RAC|$. Podobnou úvahou o strede C kružnice opísanej trojuholníku BSD ležiacom v uhle BCD dostaneme $|\sphericalangle SCB| = 2 \cdot |\sphericalangle SDB|$.

Z posledných dvoch odsekov vyplýva rovnosť $|\sphericalangle RBC| = |\sphericalangle SCB|$. To znamená, že (rovnoramenné) trojuholníky RBC a SCB sú podľa vety *sus* zhodné. Odtiaľ vyplýva zhodnosť ich výšok z vrcholov R a S na stranu BC. To vzhľadom na vyššie odvodenú polohu bodov R a S už znamená, že $BC \parallel RS$.

Poznámka:

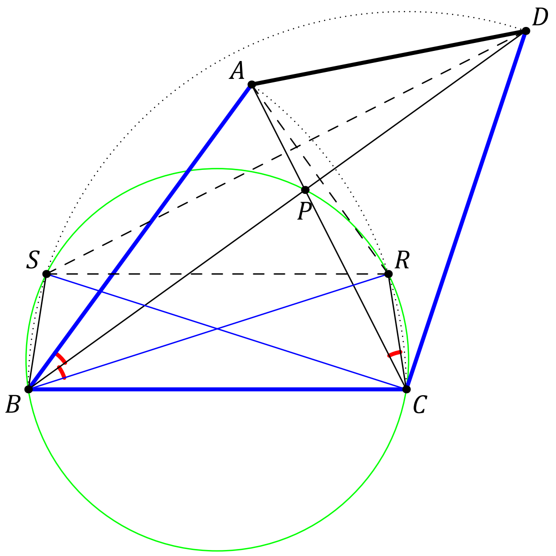
Namiesto úvahy o zhodných trojuholníkoch CBR a BCS stačí konštatovať, že zhodné úsečky BR a CS sú súmerne združené podľa osi úsečky BC.

Riešenie 2:

Ukážeme, že body R a S ležia na kružnici opísanej trojuholníku BCP. Podrobný dôkaz zapíšeme len pre bod R, pre bod S je dôkaz analogický.

Rovnako ako v prvom riešení odvodíme rovnosti $|AB| = |BC| = |CD| = |BR| = |CS|$ a poznatok, že bod R leží vnútri uhla ABC. Z podmienky $|\sphericalangle APD| < 90°$ zároveň vyplýva, že bod R leží tiež v polrovine ACD.

Bod B je stredom kružnice opísanej trojuholníku ARC, ktorej stredový uhol RBA s osou BD je teda dvojnásobkom obvodového uhla RCA. Preto sú zhodné tri uhly PBA, RBP a RCP vyznačené na obrázku. Zhodnosť posledných dvoch uhlov vzhľadom na predchádzajúci odsek už znamená, že bod R naozaj leží na kružnici opísanej trojuholníku BCP. Pre bod S to isté platí vďaka analogickej zhodnosti uhlov PCD, SCP a SBP.



Z dokázaného vyplýva, že body B, C, R, S ležia na jednej kružnici, pritom body R a S ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou BC. Odtiaľ vyplýva zhodnosť uhlov BRC a BSC, ktorá spolu s rovnosťami $|BC| = |BR| = |CS|$ znamená, že rovnoramenné trojuholníky RBC a SCB sú zhodné. Zhodnosť ich výšok z vrcholov R a S tak rovnako ako v prvom riešení vedie k dokazovanému vzťahu $BC \parallel RS$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A Zdôvodnenie rovností $|BR| = |BA|$ a $|CS| = |CD|$: 1 bod.
- B1 Dôkaz, že B je stred kružnice opísanej trojuholníku ARC: 1 bod.
- B2 Dôkaz, že C je stred kružnice opísanej trojuholníku BSD: 1 bod.
- C Dôkaz, že body A, D, R, S ležia vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou BC: 2 body.
- D Odvodenie $|\sphericalangle CBR| = |\sphericalangle BCS|$: 2 body.
- E Dôkaz, že trojuholníky RBC a SCB sú podobné: 3 body.
- F Dôkaz, že body R a S ležia na kružnici opísanej trojuholníku BCP: 3 body za oba body R a S, 2 body za jeden, ak nie je analógia pre druhý bod spomenutá.

Body z D, E a F dajte aj v prípade, keď riešiteľ neuvedie dôkaz z B1 a ani potrebnú polohu bodov R a S explicitne nezmieni.

Celkovo potom dajte maximum z bodov z A, zo súčtu bodov z B1 a z B2, zo súčtu bodov z C a z D, zo súčtu bodov z C a z E, a zo súčtu bodov z C a z F.

---

4 Nájdite všetky trojice kladných celých čísel (a, b, c), pre ktoré je súčin

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036)$$

rovný mocnine niektorého prvočísla s celočíselným exponentom.

(Ján Mazák)

Riešenie 1:

Všimnime si, že niektoré dve z troch čísel a, b, c majú rovnakú paritu, takže aspoň jedno z čísel $a+b$, $b+c$ a $c+a$ je párne.

Ak je súčin zo zadania mocninou prvočísla p, tak každý zo štyroch činiteľov musí byť mocninou p. Ako už vieme, niektorý z prvých troch činiteľov je párny, musí preto platiť $p = 2$. Každý zo štyroch činiteľov je teda mocninou 2, ktorá je pritom väčšia ako 1, pretože čísla a, b, c sú podľa zadania kladné. Z toho vyplýva, že každý činiteľ je párne číslo.

Ďalej si uvedomme, že čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$ sú všetky párne práve vtedy, keď čísla a, b, c majú všetky rovnakú paritu. Keďže číslo $a+b+c+2036$ je párne, musia byť a, b, c párne čísla. Môžeme preto písať $a = 2d$, $b = 2e$, $c = 2f$, kde d, e, f sú kladné celé čísla. Potom však platí

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036) = 2^4(d+e)(e+f)(f+d)(d+e+f+1018).$$

Všetky činitele pritom musia byť kladnými mocninami 2.

Čísla $d+e$, $e+f$, $f+d$ sú všetky párne práve vtedy, keď čísla d, e, f majú všetky rovnakú paritu. Keďže číslo $d+e+f+1018$ je párne, musia byť d, e, f párne čísla. Môžeme preto písať $d = 2g$, $e = 2h$, $f = 2i$, kde g, h, i sú kladné celé čísla. Dostávame tak

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036) = 2^8(g+h)(h+i)(i+g)(g+h+i+509).$$

Všetky činitele pritom musia byť kladnými mocninami 2.

Čísla $g+h$, $h+i$, $i+g$ sú všetky párne práve vtedy, keď čísla g, h, i majú všetky rovnakú paritu. Keďže číslo $g+h+i+509$ je párne, musia byť g, h, i nepárne čísla. Vidíme, že $g = h = i = 1$ úlohe vyhovuje (lebo $1+1+1+509 = 512 = 2^9$), takže $a = b = c = 4$, čo je riešením pôvodnej úlohy.

Ukážeme, že je jediné: Nech niektoré z čísel g, h, i je väčšie ako 1, bez ujmy na všeobecnosti nech je to i. Potom však $g+i$ je mocnina 2 väčšia ako 2, takže je deliteľná 4. To znamená, že po delení 4 jedno z nepárnych čísel g, i dáva zvyšok 1 a druhé zvyšok 3. Tretie nepárne číslo h tak má po delení 4 rovnaký zvyšok ako jedno z čísel g, i. Súčet h s týmto číslom potom má zvyšok 2, a keďže tento súčet je zároveň mocninou 2, musí ísť o mocninu 2^1. Z toho vyplýva, že $h = 1$ a $g = 1$. Zvyšok 3 po delení 4 tak nutne dáva číslo i. Potom však číslo $g+h+i+509$ čiže $i+511$ dáva po delení 4 zvyšok 2, teda to nie je mocnina 2, a to je spor.

Zadaniu úlohy teda vyhovuje jediná trojica, a to $(4, 4, 4)$.

Riešenie 2:

Nech bez ujmy na všeobecnosti platí $a \geq b \geq c$, takže potom $a+b \geq c+a \geq b+c \geq 2$. Súčin $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+2036)$ je mocninou niektorého prvočísla práve vtedy, keď sú mocninami tohto prvočísla všetky štyri činitele $a+b$, $b+c$, $c+a$ a $a+b+c+2036$. Nech teda $a+b = p^k$, $c+a = p^l$. $b+c = p^m$ pre nejaké prvočíslo p a nezáporné celé čísla k, l, m. Podľa úvodnej vety platí $k \geq l \geq m \geq 1$.

Keby platilo $k > l$, a teda $k-1 \geq l$ a $k-1 \geq m$, vzhľadom na $p \geq 2$ by sme mali

$$a+b = p^k \geq p^{k-1} + p^{k-1} \geq p^l + p^m = (c+a) + (b+c) > a+b,$$

a to by bol spor. Preto $k = l$, takže $a+b = p^k = p^l = c+a$, odkiaľ $b = c$. Potom však $p^m = b+c = 2b$, teda $2 \mid p$, čiže $p = 2$, a preto $b = c = 2^{m-1}$ a $a+b = 2^k$. Keďže $p = 2$, je tiež $a+b+c+2036 = 2^n$ pre nejaké celé číslo n, ktoré zrejme spĺňa podmienku $2^n > 2036$.

Podľa záveru predchádzajúceho odseku čísla k, m, n spĺňajú rovnosť

$$2^n = (a+b) + c + 2036 = 2^k + 2^{m-1} + 2036.$$

Všimnime si, že pri delení číslom 16 dáva číslo 2036 zvyšok 4, zatiaľ čo väčšia mocnina 2^n dáva určite zvyšok 0. Z toho vyplýva

$$2^k + 2^{m-1} \equiv 12 \pmod{16}.$$

Sčítance 2^k a 2^{m-1} ako mocniny 2 môžu pri delení 16 dávať iba zvyšky 1, 2, 4, 8 a 0. Ľahko nahliadneme, že odvodená kongruencia platí jedine v prípade, keď jedna z mocnín 2^k, 2^{m-1} dáva zvyšok 4 a druhá 8. Podľa týchto zvyškov ide nutne o mocniny 2^2 a 2^3, takže $\{k, m-1\} = \{2, 3\}$. Keďže však $2^{m-1} = b < a + b = 2^k$, platí $m - 1 < k$, a preto $m - 1 = 2$ a $k = 3$, teda $b = c = 2^{m-1} = 4$ a $a + b = 2^k = 8$, odkiaľ tiež $a = 4$. Dostávame tak jedinú možnú trojicu (a, b, c), a to $(4, 4, 4)$. Tá je skutočne riešením úlohy – súčin zo zadania má vtedy hodnotu $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2048$, čiže 2^{20}.

Poznámka:

Prečo sme rovnicu $2^n = 2^k + 2^{m-1} + 2036$ riešili úvahami o deliteľnosti číslom 16? Bola to vhodná forma riešenia tejto rovnice prepísanej do dvojkovej sústavy (čomu sme sa chceli vyhnúť), v ktorej má každá mocnina 2 (ďalej len „mocnina“) zápis tvaru $(100\ldots0)_2$, zatiaľ čo číslo 2036 má 11-ciferný zápis $(111\,1111\,0100)_2$. Aby sme z neho pripočítaním dvoch mocnín dostali opäť mocninu, je zrejmé, že zápis menšej pripočítanej mocniny musí byť $(100)_2$, a tej väčšej potom $(1000)_2$, t. j. ide o mocniny určené ich zvyškami po delení číslom 2^4 čiže 16. Podobne využijeme deliteľnosť číslom 16 aj pri všeobecnejšej rovnici $2^n = 2036 + 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1}$ z nasledujúceho tretieho riešenia.

Riešenie 3:

Zachovajme označenie p, k, l, m, n z druhého riešenia. Rovnako ako tam budeme predpokladať, že $a \geq b \geq c$, takže aj teraz bude platiť $k \geq l \geq m \geq 1$. Ukážeme, ako je možné vynechať odvodenie rovnosti $k = l$.

Keby prvočíslo p bolo nepárne, bol by nepárny aj súčet čísel $p^k + p^l + p^m$, ktorý je však podľa úpravy

$$p^k + p^l + p^m = (a + b) + (c + a) + (b + c) = 2(a + b + c)$$

párny, a to je spor. Prvočíslo p je teda párne, t. j. $p = 2$. Podľa použitej úpravy navyše vidíme, že

$$2^n = 2036 + (a + b + c) = 2036 + \frac{1}{2}(2^k + 2^l + 2^m) = 2036 + 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1}.$$

Odtiaľ podobne ako v druhom riešení získame kongruenciu

$$2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} \equiv 12 \pmod{16},$$

tentoraz so súčtom troch mocnín dvoch na ľavej strane, ktorých možné zvyšky po delení číslom 16 sú 1, 2, 4, 8, 0. Rozborom možností pre súčet troch zvyškov zistíme, že vzhľadom na vzťah $k \geq l \geq m$ zvyšky mocnín z trojice $\left(2^{k-1}, 2^{l-1}, 2^{m-1}\right)$ tvoria jednu z trojíc $(4, 4, 4)$, $(8, 2, 2)$ alebo $(0, 8, 4)$.

- Nech je to $(4, 4, 4)$.
  Vtedy $2^{k-1} = 2^{l-1} = 2^{m-1} = 4$, z čoho $a + b = c + a = b + c = 8$, odkiaľ $(a, b, c) = (4, 4, 4)$. Dosadením overíme, že táto trojica vyhovuje zadaniu úlohy.
- Nech $\left(2^{k-1}, 2^{l-1}, 2^{m-1}\right) = (8, 2, 2)$.
  Vtedy $2^{k-1} = 8$ a $2^{l-1} = 2^{m-1} = 2$, odkiaľ $a + b = 16$ a $c + a = b + c = 4$. To však odporuje tomu, že $a + b < (c + a) + (b + c)$.
- Nech $\left(2^{k-1}, 2^{l-1}, 2^{m-1}\right) = (0, 8, 4)$.
  Vtedy rovnosť $2^n = 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} + 2036$ získava tvar $2^n = 2^{k-1} + 2048$, takže $2^n > 2048 = 2^{11}$, čiže $n \geq 12$. Z rovnosti $2^n = 2^{k-1} + 2^{11}$ preto vyplýva kongruencia $2^{k-1} \equiv 2^{11} \pmod{2^{12}}$, ktorá je splnená iba pre $k = 12$. Pre čísla a, b, c tak platí $a + b = 2^k = 2^{12}$, $c + a = 2^l = 16$ a $b + c = 2^m = 8$, čo opäť odporuje tomu, že $a + b < (c + a) + (b + c)$.

Zadaniu úlohy teda vyhovuje jediná trojica (a, b, c), a to $(4, 4, 4)$.

Poznámka:

Predpokladajme, že čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ a $a + b + c + 2036$ (všetky väčšie ako 1) sú mocninami niektorého prvočísla p a uveďme ďalší dôkaz rovnosti $p = 2$.

Keďže ľavá strana rovnosti

$$2(a + b + c + 2036) - (a + b) - (b + c) - (c + a) = 4072$$

je deliteľná prvočíslom p, z rozkladu $4072 = 2^3 \cdot 509$ vyplýva, že p je rovné jednému z prvočísel 2 alebo 509. Pripusťme, že $p = 509$. Po vydelení uvedenej rovnosti číslom 509 potom dostaneme

$$2 \cdot \frac{a + b + c + 2036}{509} - \frac{a + b}{509} - \frac{b + c}{509} - \frac{c + a}{509} = 8.$$

Všetky štyri zlomky v tejto rovnosti sú celé čísla a súčasne mocniny 509, dávajú teda po delení 509 zvyšky 0 alebo 1. Je preto zrejmé, že ľavá strana rovnosti nemôže dávať po delení 509 zvyšok 8, ktorý dáva pravá strana. Tento spor už dokazuje, že naozaj platí $p = 2$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A Správna odpoveď (aj bez odvodenia a skúšky): 1 bod.

B1 Odvodenie rovnosti $p = 2$ úvahou o parite čísel a, b, c: 2 body.

B2 Odvodenie, že čísla a, b, c sú párne, a prechod k výrazu s číslom 1018: 1 bod.

B3 Prechod k výrazu s číslom 509 a pozorovanie, že každé jej riešenie je trojica nepárnych čísel: 1 bod.

B4 Doriešenie výrazu s číslom 509: 0 až 2 body podľa miery úplnosti.

C1 Zdôvodnenie, že aspoň dve z čísel a, b, c sa rovnajú: 2 body.

C2 Odvodenie rovnosti $p = 2$ za predpokladu z C1: 1 bod.

C3 Odvodenie rovnice typu $2^n = 2^k + 2^{m-1} + 2036$: 1 bod.

C4 Vyriešenie rovnice z C3: 0 až 2 body podľa miery úplnosti.

D1 Odvodenie $p = 2$ bez predpokladu, že aspoň dve z čísel a, b, c sa rovnajú: 2 body, z toho 1 bod za zdôvodnenie vzťahu $p \in \{2, 509\}$.

D2 Odvodenie rovnice typu $2^n = 2^{k-1} + 2^{l-1} + 2^{m-1} + 2036$: 1 bod.

D3 Vyriešenie rovnice z D2: 0 až 3 body podľa miery úplnosti.

Celkovo potom dajte maximum z bodov z A, zo súčtu bodov z B1, z B2, z B3 a z B4, zo súčtu bodov z C1, z C2, z C3 a z C4, a zo súčtu bodov z D1, z D2 a z D3.
