
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh domáceho kola kategórie B (maďarská verzia)

1 Egy táblára felírunk tíz, páronként különböző pozitív egész számot. Egy lépésben aláhúzzunk minden olyan számot, amely nem írható fel két különböző a táblán szereplő szám összegeként, s ezután az összes aláhúzott számot letöröljük.

- Bizonyítsd be, hogy tetszőlegesen felírt tíz szám esetén véges sok lépés után a tábla üres lesz.
- Határozd meg azt a lehető legnagyobb lépésszámot, amelyek elvégzése után még a táblán maradhat fenn szám. Mutass példát olyan tíz számra, amelyre ez a lépésszám elérhető.

(Patrik Bak)

2 Jelölje M egy 3×3 -as táblázat páronként különböző 1-től 9-ig terjedő természetes számokkal való összes kitöltésének számát. Továbbá, jelölje N azon kitöltések számát ezek közül, amelyekre minden sorban és minden oszlopban a számok összege páratlan. Határozd meg az $N : M$ arányt!

(Jaromír Šimša)

3 Határozd meg az összes olyan valós számokból álló (a, b) számpárt, amelyekre az

$$\begin{aligned}a(x^2 + ax + b) + b(x^2 + bx + a) &= 0, \\ a(x^2 + bx + a) + b(x^2 + ax + b) &= 0\end{aligned}$$

egyenletek mindegyike egy olyan másodfokú egyenlet, amelynek kétszeres gyöke van.

(Jaroslav Švrček)

4 A konvex $ABCDE$ ötszögre fennáll: $BC \parallel ED$, $AE \parallel CD$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EAD|$ és $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD|$. Bizonyítsd be, hogy $|CD| = |ED|$.

(Patrik Bak)

- Minden p prímszámra adj példát olyan pozitív egész a, b, c számokra, amelyekre $ab = c^2$ és $a + b - 2c = p$.
- Bizonyítsd be, hogy ha a, b, c olyan pozitív egész számok, amelyekre $ab = c^2$, akkor az $a + b + 2c$ szám összetett.

(Josef Tkadlec)

6 Adott a derékszögű ABC háromszög, melynek derékszöge a B csúcsnál van. Jelölje I a beírt körének középpontját, M az AC átfogó középpontját, valamint X az IM és BC egyenesek metszéspontját. Bizonyítsd be, hogy ha a B, I, M és C pontok egy körvonalra illeszkednek, akkor az ABX háromszög egyenlő szárú.

(David Hruška)

Termín odovzdania riešení: **16. 1. 2023**
