

64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória A

Domáce kolo – riešenie úloh

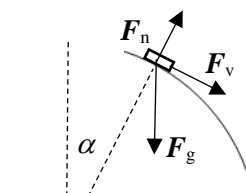
1) Telesá spojené vláknom

Riešenie:

a) Obr. RA-1.

Na telesko pôsobia sily F_g – tiažová, F_n – tlaková sila polvalca, F_v – ťahová sila vlákna.

1 b



Obr. RA-1

b) Výsledná sila vyvoláva zrýchlenie telieska.

Dotyčnicová zložka spôsobí zrýchlenie telieska

$$m a = F_v + F_g \sin \alpha$$

$$m \frac{v^2}{R} = F_g \cos \alpha - F_n.$$

1 b

Teliesko stratí kontakt s polgul'ou, ak $F_n = 0$, odkiaľ

$$\cos \alpha_m = \frac{v^2}{g R}. \quad (1)$$

Ak neuvažujeme trenie, v sústave sa zachováva mechanická energia

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = M g (R \alpha) + m g R (1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

1 b

Po dosadení

$$(3m+M) \cos \alpha_m = 2(m+M \alpha_m). \quad (3)$$

Rovnicu riešime numericky alebo graficky pre dané hodnoty. V grafe na obr. RA-2 je krivka L' (ľavá strana) a P (pravá strana).

Riešenie rovnice je daná priesečníkom funkcií: $\alpha_m \approx 43,9^\circ$.

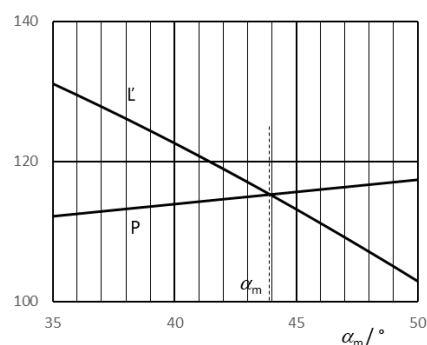
1 b

c) $v_m = \sqrt{g R \cos \alpha_m} \approx 1,46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1 b

$$a_0 = g \frac{M}{m+M} \approx 1,64 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \quad 1 \text{ b}$$

$$a_m = g \frac{M + m \sin \alpha_m}{m+M} \approx 7,30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad 1 \text{ b}$$



Obr. RA-2

d) Z (2) určíme rýchlosť

$$v = \sqrt{2 R g \frac{M \alpha + m(1 - \cos \alpha)}{m+M}} = R \frac{d\alpha}{dt}. \quad 1 \text{ b}$$

Odtiaľ máme diferenčnú rovnicu

$$dt = \frac{R}{v} d\alpha.$$

Jej integráciu urobíme numericky.

Dobre posluži tabuľkový editor MS EXCEL

Postup:

V prvom stĺpci je α_i v stupňoch, krok $\Delta\alpha = 1^\circ$ (od 0 do 90°)

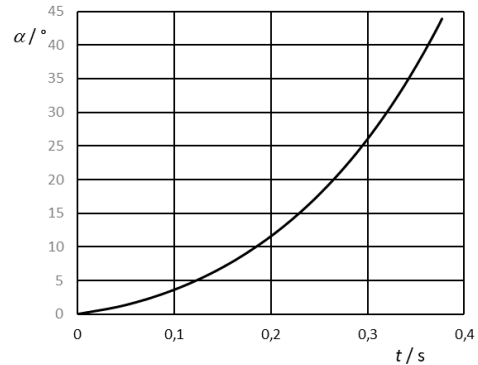
V druhom stĺpci uhol prepočítame na radiány

V treťom stĺpci vypočítame rýchlosť v_i pre uhol α_i

V štvrtom stĺpci určíme $dt \rightarrow \Delta t_i$ pre krok $d\alpha \rightarrow \Delta\alpha$

V piatom $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$

Zostrojíme graf z hodnôt prvého a piateho stĺpca, obr. RA-3.



1 b

Z tabuľky alebo grafu určíme $t_m \approx 0,377$ s.

1 b

Obr. RA-3

2) Termodynamika

Riešenie:

a) Na obr. A (a) a (b) sú znázornené Carnotove cykly.

Proces $1 \rightarrow 2$ je izoterma. Procesy sú vratné, preto pre entropiu v procesoch platí $\Delta S = \Delta Q/T$.

Pre proces $2 \rightarrow 3$ je $\Delta S = S_3 - S_2 = 0$ a $\Delta Q = 0$, proces je adiabatický. Proces $3 \rightarrow 4$ je izoterma.

Pre proces $4 \rightarrow 1$ je $\Delta S = S_1 - S_4 = 0$ a $\Delta Q = 0$, proces je adiabatický.

Celý cyklus je teda Carnotov cyklus a jeho účinnosť $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} \approx 0,625 = 62,5\%$. 2 b

b) Stroj A prijíma teplo v procese $3 \rightarrow 4$.

Prijaté teplo $Q_{in} = T_3(S_4 - S_3) = T_3(S_1 - S_3) \approx 160$ kJ. 1 b

Stroj odovzdáva teplo v procese $1 \rightarrow 2$.

Odovzdané teplo $Q_{out} = T_1(S_1 - S_2) = T_1(S_1 - S_3) = 60$ kJ. 1 b

Stroj A vykoná v jednom cykle prácu $W = Q_{in} - Q_{out} \approx 100$ kJ. 1 b

c) V prípade teleného čerpadla prejde plyn rovnaký cyklus, ale v opačnom smere. Hodnoty veličín (tepla a práce) zmenia znamienko.

To znamená, že čerpadlo prijme v procese $2-1$ teplo $Q_1 = 60$ kJ 1 b

a v procese $4-3$ odovzdá teplejšiemu prostrediu teplo $Q_2 = 160$ kJ. 1 b

Práca v tomto prípade $W < 0$, čo znamená, že čerpadlu treba dodávať energiu vo forme práce pohonu čerpadla (zvyčajne elektrickú na pohon kompresoru čerpadla).

d) Zdanlivý paradox je nasledujúci. Čerpadlo Č na obr. (b) pre uvedené údaje čerpá z chladnejšieho prostredia 60 kJ tepla a vykonaním práce 100 kJ odovzdá do teplejšieho prostredia celkom 160 kJ tepla. Na 1 J vykonanej práce sa do teplejšieho prostredia dodá 1,6 J tepla. Ak účinnosť tepelného stroja A bude len $\eta_2 = 0,1$, potom zo 100 J tepla z teplejšieho prostredia premení na prácu len 10 J, kým do chladnejšieho prostredia odovzdá 90 J tepla. Obrátením procesu potom čerpadlo Č vykonaním práce 10 J prečerpá z chladnejšieho prostredia teplo 90 J a odovzdá do teplejšieho prostredia celkom 100 J, teda na 1 J vykonanej práce pripadá 10 J odovzdaného tepla. Príčinou paradoxu je, že nižšia účinnosť tepelného stroja (pri rovnakej teplote chladnejšieho média) je daná nižším teplotným rozdielom medzi teplejším a chladnejším médiom. Tepelné čerpadlo pri nižšej účinnosti η prenáša teplo medzi prostrediami s menším teplotným rozdielom (a preto viac tepla, než keď teplotný rozdiel je vysoký, a účinnosť tepelného stroja je vysoká). 3 b

3) Elektrický obvod

Riešenie:

a) Impedancia dvojpólu

$$\mathbf{Z} = \frac{(R + j\omega L) \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{2R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R \frac{R + \frac{L}{RC} + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Vzťah je frekvenčne nezávislý, ak

$$R + \frac{L}{RC} = 2R, \text{ odkiaľ } R = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1) \quad 2 \text{ b}$$

b) Prúdy vetiev

$$I_A = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad I_B = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Pri frekvencii f_0 , resp. uhlovej frekvencii $\omega_0 = 2\pi f_0$ platí $I_A = I_B$, odkiaľ dostávame

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \text{ resp. } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (2) \quad 2 \text{ b}$$

c) Z podmienok (1) a (2) určíme

$$C = \frac{1}{\omega_0 R} = \frac{1}{2\pi f_0 R},$$

$$L = \frac{R}{\omega_0} = \frac{R}{2\pi f_0}.$$

Pre dané hodnoty: $C \approx 32 \text{ nF}$, $L \approx 8,0 \text{ mH}$.

1 b

d) Napätie medzi uzlami A, O a B, O

$$\mathbf{U}_{AO} = \frac{R}{R + j\omega L} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}_{BO} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \mathbf{U}$$

Napätie medzi uzlami A a B

$$\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{U}_A - \mathbf{U}_B = \left(\frac{R}{R + j\omega L} - \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right) \mathbf{U}$$

a po úprave

$$\mathbf{U}_{AB} = -j \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \mathbf{U} = -j \frac{\frac{f_0}{f} + \frac{f}{f_0}}{2 + j \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \mathbf{U}.$$

Efektívna hodnota

$$U_{AB} = \frac{\frac{f_0}{f} + \frac{f}{f_0}}{\sqrt{4 + \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}} U = U. \quad 1 \text{ b}$$

Pozn.: Z výsledku je zrejmé, že efektívna hodnota napätia medzi uzlami A a B pri daných podmienkach nezávisí od frekvencie.

Fázový rozdiel

$$\varphi_{AB} = -\frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]. \quad 1 \text{ b}$$

Pre dané hodnoty frekvencií:

pre $f_1 = 1,0 \text{ kHz}$ $U_{AB} \approx 12 \text{ V}$, $\varphi_{AB} \approx -11,4^\circ$

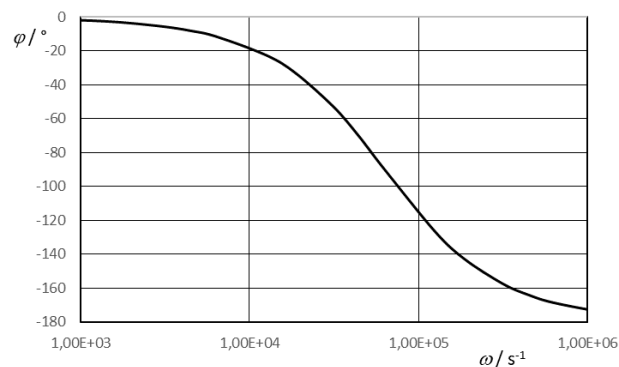
pre $f_2 = 10 \text{ kHz}$ $U_{AB} = 12 \text{ V}$, $\varphi_{AB} = -90^\circ$

pre $f_3 = 100 \text{ kHz}$ $U_{AB} = 12 \text{ V}$, $\varphi_{AB} \approx -169^\circ$.

Spolu 1 b

- e) Graf efektívnej hodnoty $U_{AB}(\omega)$ je zbytočný, keďže $U_{AB} = U$ od frekvencie nezávisí.

Graf fázového rozdielu $\varphi_{AB}(\omega)$:



Obr. RA-4

Z výsledku vidno, že uvedený obvod sa používa ako frekvenčne závislý fázový posúvač.

2 b

4) Šošovka

Riešenie:

- a) Ak je otvor clony malý, $r \ll R$, všetky lúče dopadajúce na šošovku rovnobežne s optickou osou sa po prechode šošovkou sústreďujú v ohnisku vo vzdialenosti x_0 od vrcholu V, pričom platí zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{f} = (n-1) \frac{1}{R}, \text{ odkiaľ } x_0 = \frac{1}{n-1} R \approx 10 \text{ cm}. \quad (1) \quad 1 \text{ b}$$

- b) Pri prechode svetla šošovkou dochádza k difrakcii. Sústredenie zbiehavých lúčov na malú plošku je ekvivalentné vyžarovaniu malej kruhovej plošky do lievikovitého difrakčného zväzku s vrcholovým uhlom $\Delta\varphi$. Zjednodušene možno pre odhad použiť vzťah pre šírku hlavného difrakčného zväzku žiarenia štrbiny vzťah pre uhol prvého minima

$$\sin \varphi_{\min 1} = \frac{\lambda}{a}, \text{ kde } \lambda \text{ je vlnová d\AA{lka a } a \text{ \AA{irka \AA{trbiny.}}$$

$$\text{Pre mal\AA{y uhol plat\AA{ } pribli\AA{ne } } \varphi_{\min 1} \approx \frac{\lambda}{a}. \quad (2)$$

Ak v inverznom pr\AA{pade uva\AA{ujeme uhol zbiehavosti krajn\AA{ho l\AA{u\AA{a}

$$\tan \varphi = \frac{r}{x_0} = \frac{r}{R}(n-1) \approx \varphi,$$

s pou\AA{it\AA{m vz\AA{tahu (1) pre $\varphi = \varphi_{\min 1}$ dost\AA{vame

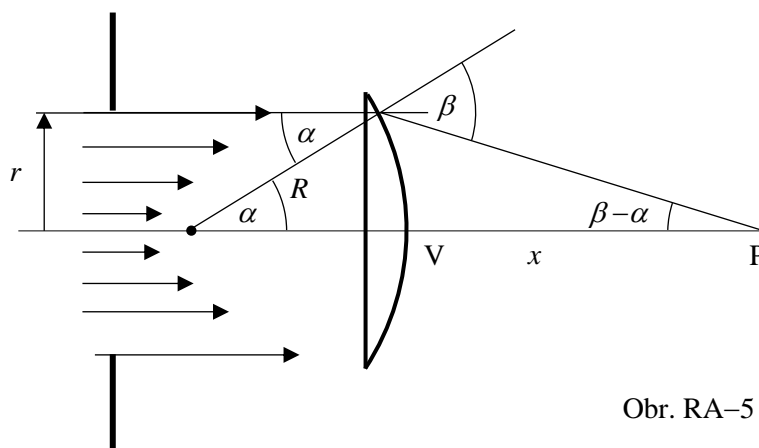
$$a_m \approx \frac{\lambda}{n-1} \frac{R}{r}. \quad (3) \quad 1 \text{ b}$$

Z v\AA{sledku vid\AA{me, \AA{e so zmen\AA{ovan\AA{m otvoru sa priemer stopy zvy\AA{\AA{uje. To sa napr. prejavuje pri fotografovan\AA{ } – pri zvy\AA{\AA{ovan\AA{ } clonov\AA{ho \AA{isla (zmen\AA{ovan\AA{ } otvoru clony) sa zni\AA{uje ostros\AA{ } obrazu.

Napr.: pre $r/R = 0,1$ a $\lambda = 500 \text{ nm}$ dost\AA{vame $a_m \approx 10 \mu\text{m}$, \AA{o je rozostrenie meratel\AA{n\AA{e, ale prost\AA{ym okom nepozorovatel\AA{n\AA{e.}

Pozn.: Pri odhadu priemeru stopy sa pou\AA{il jednoduch\AA{\AA{ } vz\AA{t\AA{h pre \AA{trbinu. V skuto\AA{nosti ide o kruhov\AA{y otvor a vo vz\AA{tahu (1) je pre kruhov\AA{y otvor navy\AA{e faktor 1,22.

- c) Uva\AA{zujme polomer otvoru clony r , ktor\AA{y nie je mal\AA{y v porovnan\AA{ } s polomerom krivosti R . Situ\AA{ciu zn\AA{zorn\AA{uje obr. RA–5.



Obr. RA–5

Vyjadr\AA{me vzdialenos\AA{ } x priese\AA{n\AA{ku P os vrcholu \AA{o\AA{ovky

$$x = R \cos \alpha - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} + \frac{R \sin \alpha}{\tan(\beta - \alpha)} - \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right).$$

Vz\AA{t\AA{h uprav\AA{me na tvar

$$\frac{x}{R} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} - 1 + \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \sqrt{1 - n^2 \frac{r^2}{R^2}} + n \frac{r^2}{R^2}}{n \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} - \sqrt{1 - n^2 \frac{r^2}{R^2}}}$$

a d\AA{alej

$$\frac{x}{R} = \frac{n\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \sqrt{1-n^2\left(\frac{r}{R}\right)^2} + n\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} \left(\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} - 1\right)}{n\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} - \sqrt{1-n^2\left(\frac{r}{R}\right)^2}}. \quad (4) \quad 2 \text{ b}$$

Môžeme si všimnúť, že pre $\frac{r}{R} \rightarrow 0$ (malý polomer otvoru clony) dostávame

$$\frac{1}{x_0} = (n-1) \frac{1}{R} = \frac{1}{f}, \text{ čo zodpovedá vzťahu (1).}$$

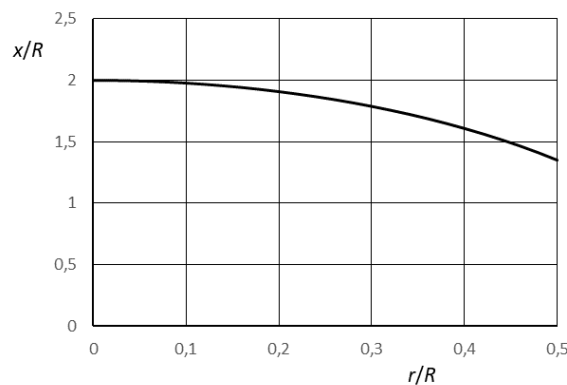
Zo vzťahu (4) vyplýva, že poloha priesečníku P sa mení so vzdialenosťou r dopadajúceho lúča od optickej osi.

Pre $r/R = 1/2$, $n = 1,50$ dostávame

$$\left(\frac{x}{R}\right)_m = \frac{n + 2\sqrt{4-n^2} + n(3-2\sqrt{3})}{2n\sqrt{3} - 2\sqrt{4-n^2}} \approx 1,35, \quad 1 \text{ b}$$

a teda $x_m \approx 6,75$ cm.

Na nasledujúcom obrázku je graf funkcie (4). 1 b



Obr. RA-6

- d) Všimnime si obr. RA-5. Krajný lúč opustí šošovku v bode A a na tienidlo dopadne v bode B, pričom $FB = a_0/2$. Z podobnosti trojuholníkov dostaneme

$$\frac{r}{x_m + (R - R \cos \varphi_m)} = \frac{a_0/2}{x_0 - x_m}, \text{ kde } \cos \varphi_m = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Po úprave dostaneme

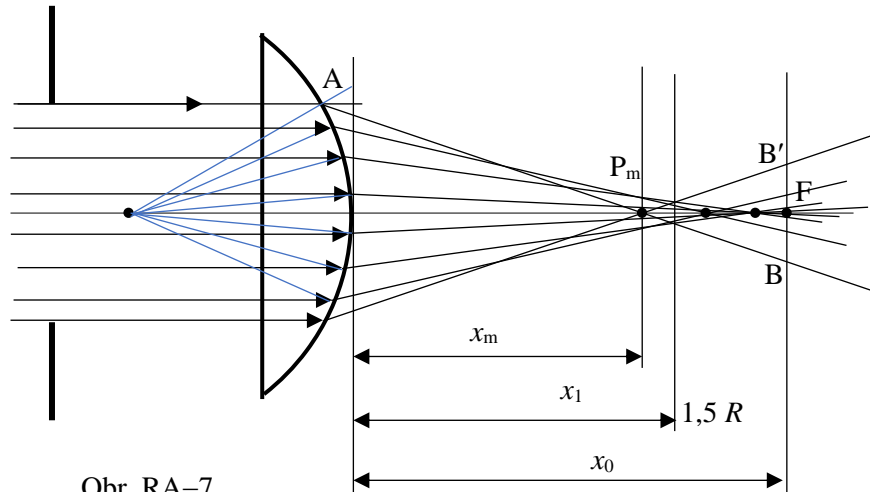
$$a_0 = R \frac{2\left(\frac{r}{R}\right)\left(\frac{x_0 - x_m}{R}\right)}{1 + \left(\frac{x_m}{R}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}, \text{ kde } \frac{r}{R} = 0,5, \frac{x_0}{R} = 2, \frac{x_m}{R} \approx 1,35.$$

Po dosadení $a_0 \approx 0,44 R = 2,2$ cm. 1 b

- e) Prechod lúčov cez šošovku znázorňuje nasledujúci obrázok RA-7. 1 b

Vidíme, že priesečník P lúčov s optickou osou sa pri zväčšovaní r posúva z bodu F (ohnisko pre $r \rightarrow 0$) do bodu P_m pre $r = R/2$.

V obrázku vidíme priemer svetelnej stopy BB' v rovine ohniska.



Obr. RA-7

Ak nakreslíme obrázok v skutočnej mierke, odčítame z obrázku $a_0 \approx 22$ mm, čo sa zhoduje s hodnotou určenou výpočtom. 1 b

- f) Z obrázku graficky zistíme, že najmenší priemer svetelnej stopy bude vo vzdialenosti tienidla od vrcholu šošovky $x_1 \approx 1,5 R = 7,5$ cm.

Z obrázku ďalej určíme priemer stopy $a_1 \approx 4,9$ mm. 1 b

Pozn.: Pri hrubej šošovke polohu ohniska nezistíme zaostrením na čo najmenšiu svetelnú stopu.

5) Antičastice v mrakoch

Riešenie

- a) Na začiatku je izotop ^{14}N v pokoji. Absorbujeme fotón s energiou E_f a hybnosťou $p_f = E_f/c$. Po absorpcii fotónu sa pôvodný izotop rozdelí na dvojicu izotop ^{13}N a neutrón. Hybnosť hmotného stredu tejto sústavy je rovná hybnosti fotónu pred zrážkou a vo všeobecnom prípade sa častice pohybujú vzhľadom na hmotný stred vzájomne od seba.

Energia fotónu sa využije na prekonanie väzby (uvoľnenie neutrónu) a kinetickú energiu častíc po zrážke. Minimálna energia fotónu zodpovedá minimálnej kinetickej energii častíc, tzn. nulová rýchlosť ich relatívneho pohybu vzhľadom na hmotný stred. Zostáva iba kinetická energia sústavy častíc s rýchlosťou hmotného stredu.

Uvážime, či je potrebné uvažovať relativistické rýchlosti. Najprv použijeme nerelativistický výpočet, a potom uvážime, či vyhovuje.

Pre hybnosť v prípade minimálnej energie fotónu platí

$$p_f = \frac{E_f}{c} = [m_{\text{N13}} + m_n] v_T \quad (5)$$

a pre energiu

$$E_f + m_{\text{N14}} c^2 = [m_{\text{N13}} + m_n] c^2 + \frac{1}{2} [m_{\text{N13}} + m_n] v_T^2, \quad (6)$$

odkiaľ dostávame kvadratickú rovnicu pre v_T

$$v_T^2 - 2 c v_T + 2 \frac{m_{\text{N13}} + m_n - m_{\text{N14}}}{m_{\text{N13}} + m_n} c^2 = 0.$$

Riešenie má tvar

$$v_T = c \left(1 \pm \sqrt{\frac{2m_{N14}}{m_{N13} + m_n} - 1} \right).$$

Pre znamienko (-) je $v_T \approx 8,09 \times 10^{-4} c$.

Pre znamienko (+) je $v_T > c$, čo nie je fyzikálne prijateľný výsledok.

Z výsledku vidíme, že nerelativistický výpočet je tiež oprávnený.

1 b

Potom máme

$$E_f = (m_{N13} + m_n) v_T c = \left(1 - \sqrt{\frac{2m_{N14}}{m_{N13} + m_n} - 1} \right) (m_{N13} + m_n) c^2.$$

Pre dané hodnoty $E_f \approx 1,692 \times 10^{-12} \text{ J} \approx 10,558 \text{ MeV}$.

1 b

Pre hybnosť a kinetickú energiu sústavy platí

$$p_f = p_{N13} + p_n = \frac{E_f}{c}$$

$$E_f = E_{kN13} + E_{kn} = \frac{p_{N13}^2}{2m_{N13}} + \frac{p_n^2}{2m_n}.$$

Odtiaľ dostaneme pre p_n kvadratickú rovnicu

$$p_n^2 - 2 \frac{m_n}{m_{N13} + m_n} \frac{E_f}{c} p_n + \frac{m_n}{m_{N13} + m_n} (E_f - 2m_{N13} c^2) \frac{E_f}{c^2} = 0.$$

Tá má riešenie

$$p_n = \frac{m_n}{m_{N13} + m_n} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{m_{N13} + m_n}{m_n} \left(\frac{2m_{N13} c^2}{E_f} - 1 \right)} \right] \frac{E_f}{c}$$

$$a \quad p_{N13} = \frac{E_f}{c} - \frac{m_n}{m_{N13} + m_n} \frac{E_f}{c} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{m_{N13} + m_n}{m_n} \left(\frac{2m_{N13} c^2}{E_f} - 1 \right)} \right].$$

Ak predpokladáme, že neutrón sa pohybuje v smere dopadu fotónu, uvažujeme znamienko (+), pre ktoré je $p_n > 0$. Keďže výraz s odmocninou má hodnotu približne 179, je pre znamienko (-) výsledok $p_n < 0$, čo je v rozpore so zadaním.

Pre dané hodnoty $p_n \approx 7,290 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $p_{N13} \approx -6,726 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Kinetická energia produktov reakcie

$$E_{kn} = \frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{m_n}{2(m_{N13} + m_n)^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{m_{N13} + m_n}{m_n} \left(\frac{2m_{N13} c^2}{E_f} - 1 \right)} \right]^2 \left(\frac{E_f}{c} \right)^2$$

$$E_{kN13} = \frac{p_{N13}^2}{2m_{N13}} = \frac{1}{2m_{N13}} \left\{ \frac{E_f}{c} - \frac{m_n}{m_{N13} + m_n} \frac{E_f}{c} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{m_{N13} + m_n}{m_n} \left(\frac{2m_{N13} c^2}{E_f} - 1 \right)} \right] \right\}^2.$$

Pre dané hodnoty $E_{kn} \approx 1,5872 \times 10^{-12} \text{ J} = 9,907 \text{ MeV}$, $E_{kN13} \approx 1,0477 \times 10^{-13} \text{ J} = 0,6539 \text{ MeV}$.

2 b

Alternatíva:

Pri relativistickom riešení použijeme nasledujúce relativistické vzťahy pre zákon zachovania hybnosti a energie

$$m({}^{14}\text{N})c^2 + E_f = [m({}^{13}\text{N}) + m_n] c^2 \gamma,$$

$$\frac{E_f}{c} = [m({}^{13}\text{N}) + m_n] c \beta \gamma,$$

kde $\beta = v/c$, $\gamma = [1 - \beta^2]^{-1/2}$, kde v je rýchlosť neutrónu a izotopu ${}^{13}\text{N}$ (v sústave, v ktorej pôvodný atóm ${}^{14}\text{N}$ bol v pokoji).

A odtiaľ

$$E_f = \frac{[m({}^{13}\text{N}) + m_n]^2 - [m({}^{14}\text{N})]^2}{2m({}^{14}\text{N})} c^2 \approx 10,558 \text{ MeV}.$$

Keďže sú rýchlosti relatívne malé, sú výsledky získané relativisticky a klasicky rovnaké.

- b) Izotop (jadro) ${}^{13}\text{N}$ emituje pozitron a premení sa na izotop ${}^{13}\text{C}$. Ak je vplyv neutróna zanedbateľný, uvažujeme iba výsledné produkty ${}^{13}\text{C}$ a e^+ .

V sústave ${}^{13}\text{N}$ s nulovou hybnosťou majú hybnosti ${}^{13}\text{C}$ a e^+ rovnakú veľkosť a opačný smer

$$p_C = p_e. \quad (7)$$

Pre energiu sústavy máme

$$m_{\text{N13}} c^2 = [m_{\text{C13}} + m_e] c^2 + E_{\text{kC}} + E_{\text{ke}}. \quad (8)$$

Určíme pomer oboch kinetických energií.

$$\text{Pre } E_{\text{kC}} = \frac{p_C^2}{2m_{\text{C13}}} \text{ a } E_{\text{ke}} = \frac{p_e^2}{2m_e} \text{ je } \frac{E_{\text{kC}}}{E_{\text{ke}}} = \frac{m_e}{m_{\text{C13}}} \approx 4,2 \times 10^{-5},$$

tzn. E_{kC} je zanedbateľne malá v porovnaní s E_{ke} .

Potom

$$E_{\text{ke}} \approx [m_{\text{N13}} - m_{\text{C13}} - m_e] c^2 \approx 2,739 \times 10^{-13} \text{ J} \approx 1,71 \text{ MeV}. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Pri anihilácii elektrónu a pozitronu v mezoatóme častice zaniknú a vzniknú dva rovnaké fotóny. Musia byť dva a rovnaké, postupujúce vo vzájomne opačných smeroch, lebo začiatková hybnosť mezoatómu je nulová, a tak hybnosť sústavy vznikajúcich fotónov musí byť tiež nulová (fotóny musia mať hybnosti s rovnakou veľkosťou a s opačným smerom). Znamená to, že oba fotóny majú rovnakú energiu E_f . 1 b

Pritom platí

$$(m_{e^+} + m_{e^-}) c^2 = 2 E_f, \text{ odkiaľ } E_f = m_e c^2 \approx 8,187 \times 10^{-14} \text{ J} \approx 0,511 \text{ MeV}. \quad 1 \text{ b}$$

- d) Energia uvoľnená pri reakcii

$$Q = [m_{\text{N14}} + m_n - m_{\text{C14}} - m_p] c^2 \approx 1,003 \times 10^{-13} \text{ J} \approx 0,626 \text{ MeV}. \quad 1 \text{ b}$$

Keďže $Q > 0$, je reakcia exotermická. 1 b

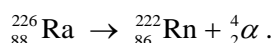
6) Alfa premena

Riešenie:

Pred riešením vyhladáme hodnoty niektorých veličín a konštánt.

$M_{\text{Ra}} = 226 \text{ u}$, $M_{\text{Rn}} = 222 \text{ u}$, $m_\alpha = 4 \text{ u}$, $u = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

- a) Rovnica premeny



α -premenou rádia vzniká radón.

1 b

Pozn.: V oblastiach zvýšeného výskytu rádia v zemskej kôre vzniká rádioaktívny plyn radón, ktorý stúpa k povrchu zeme a nepriaznivo ovplyvňuje životné prostredie.

- b) V tabuľkách nájdeme polčas premeny izotopu ^{226}Ra $T = 1\,601$ roka.

Zákon premeny je

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -\frac{\ln 2}{T} N.$$

Vo vzorke s hmotnosťou m je počet atómov

$$N = n N_A = \frac{m}{M_m} N_A, \text{ kde } M_m = 226 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} \text{ a } N_A = 6,023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ (Avogadrova konštanta)}$$

Aktivita vzorky (jednotka Bq – becquerel), tzn. počet premien za jednotku času.

Za dobu $\Delta t \ll T$ sa uvoľní počet α -častíc

$$\nu = -\frac{dN}{dt} \Delta t = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{M_m} N_A \Delta t \approx 3,66 \times 10^{10}. \quad 2 \text{ b}$$

- c) Predpokladajme na začiatku atóm rádia v pokoji. Premenu vznikne radón a α -častica s hmotnosťami $m_\alpha = 4 \text{ u}$ a $m_{\text{Rn}} = 226 \text{ u}$, kde $\text{u} = 1,666 \times 10^{-27} \text{ kg}$, a rýchlosťami v_α a v_{Rn} . Pri premene sa zachováva hybnosť

$$m_\alpha v_\alpha + m_{\text{Rn}} v_{\text{Rn}} = 0 \quad (1)$$

Uvoľnená energia vo forme kinetickej energie častíc (použijeme nerelativistický vzťah a potom overíme správnosť jeho použitia)

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Rn}} v_{\text{Rn}}^2. \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) vyjadríme rýchlosti

$$v_{\text{Rn}} = \sqrt{\frac{2E}{m_{\text{Rn}}} \frac{m_\alpha}{m_{\text{Rn}} + m_\alpha}} \approx 2,689 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad 1 \text{ b}$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha} \frac{m_{\text{Rn}}}{m_{\text{Rn}} + m_\alpha}} \approx 1,519 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad 1 \text{ b}$$

Z výsledkov vidíme, že rýchlosti sú rádovo menšie ako rýchlosť svetla, preto použitie nerelativistického výpočtu je oprávnené.

- d) Na časticu s elektrickým nábojom, ktorá sa pohybuje v magnetickom poli, pôsobí Lorentzova sila kolmá na smer pohybu a na smer vektora magnetickej indukcie \mathbf{B} . Častica sa pohybuje v jednej rovine, iba ak je jej rýchlosť kolmá na \mathbf{B} (ak nie je rýchlosť kolmá na \mathbf{B} , ide o pohyb po skrutkovici, čo nie je pohyb v jednej rovine).

Sledujeme preto α -premenu, pri ktorej je α -častica emitovaná v smere kolmom na \mathbf{B} . Vtedy aj produkt Rn sa pohybuje kolmo na \mathbf{B} . 1 b

Náboj α -častice je $Q_\alpha = 2e$. Bezprostredne po emisii α -častice zostáva v elektrónovom obale pôvodný počet elektrónov, preto náboj iónu Rn^{2-} je $Q_{\text{Rn}}^{2-} = -2e$, kde $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ je elementárny náboj.

Z pohybovej rovnice

$$m \frac{v^2}{R} = Q v B$$

dostávame pre jednotlivé produkty polomery krivosti

$$R_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}}{2eB} = \frac{1}{eB} \sqrt{\frac{m_{\alpha} m_{Rn} E}{2(m_{Rn} + m_{\alpha})}} \approx 6,30 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

$$R_{Rn} = \frac{m_{Rn} v_{Rn}}{2eB} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}}{2eB} = R_{\alpha} \approx 6,30 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

Obe častice majú rovnakú hybnosť, a teda aj rovnaký polomer zakrivenia, a obe sa vychýľujú od pôvodného smeru v rovnakom smere.

- e) V prípade samotného jadra bez elektrónov sa v prípade α -častice nič nemení. Jadro Rn má ale 86 protónov, a teda náboj $Q' = +86e$. Polomer krivosti

$$R_{Rn}^* = \frac{m_{Rn} v_{Rn}}{86eB} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}}{43 \cdot 2eB} = \frac{R_{\alpha}}{43} \approx 1,47 \text{ mm.}$$

Polomer krivosti je podstatne menší a častice sa odchyľujú od pôvodného smeru na opačné strany. 2 b

7) Meranie hrúbky vlákna – experimentálna úloha

Riešenie:

Difrakcia na vlákne je rovnaká ako na štrbine s rovnakou šírkou d . Difrakčný obrazec vykazuje difrakčné maximá pod uhlami difrakcie

$$\varphi_n = \arcsin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d} \right], \text{ kde } n = 1, 2, \dots$$

Pre $d \gg \lambda$ výraz zjednodušíme

$$\varphi_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d}, \text{ a teda } \Delta\varphi = \frac{\lambda}{d}.$$

Na meranie je vhodné laserové ukazovadlo, upevnené v stojane vo vodorovnom smere. Do druhého stojanu umiestnime merané vlákno. Vodorovný lúč premietame na vhodné tienidlo (napr. na stenu miestnosti) v dostatočnej vzdialenosti (niekoľko metrov). Ak nastavíme vlákno do lúča, objaví sa na tienidle okrem hlavného maxima (primárny lúč) séria difrakčných maxím na obidve strany.

Difrakčný uhol učíme zo vzdialenosti tienidla od vlákna a na tienidle difrakčného maxima od stopy primárneho lúča.

64. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori návrhov úloh:	Lubomír Konrád (1, 6), Aba Teleki (2, 5), Ivo Čáp (3, 4, 7), Kamil Bystrický (4)
Recenzia:	Aba Teleki, Lubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022