64. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2022/2023
Kategória E
Úlohy domáceho kola - riešenie

1) Oneskorený vlak

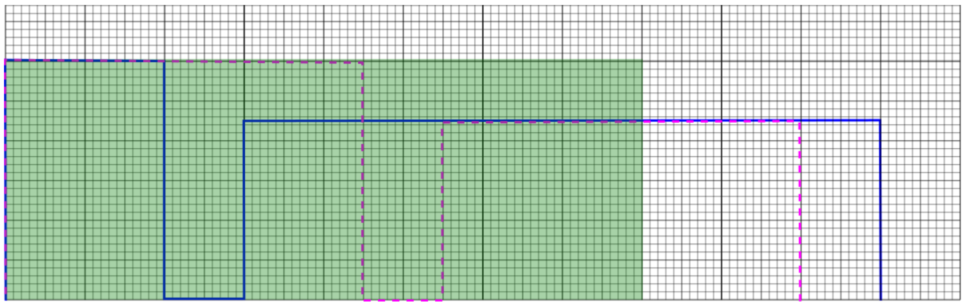
Riešenie:

a) Nech je dĺžka celej trate s, a čas po ktorý sa vlak pohyboval v druhej časti t_3.
Podľa zadania platí $s = v_0 t_c = v_0 t_1 + 0{,}75 v_0 t_3 = v_0(t_1 + t_2 + t_3 - t_4)$.
Po krátení rýchlosťou v_0 dostaneme
$t_2 + 0{,}25\, t_3 - t_4 = 0$, teda $t_3 = 4(t_4 - t_2) = 4(1{,}50\ \mathrm{h} - 0{,}50\ \mathrm{h}) = 4{,}00\ \mathrm{h}$.
Vlak po vynútenom zastavení sa pohyboval rýchlosťou $0{,}75\, v_0$ po dobu $t_3 = 4{,}00\ \mathrm{h}$.
$t_c = \mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2 + \mathrm{t}_3 - \mathrm{t}_4 = 4{,}00\ \mathrm{h}$. 3 body

b) Zmena v meškaní $\Delta t = t_4 - t_5$ vznikla na trati dĺžky $s_2 = 45\ \mathrm{km}$
a $t_4 - t_5 = 0{,}50\ \mathrm{h} = \frac{s_2}{0{,}75 v_0} - \frac{s_2}{v_0} = \frac{s_2}{v_0}\frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{45\ \mathrm{km}}{3}\frac{1}{v_0} = (15\ \mathrm{km})\frac{1}{v_0}$.
Rýchlosť vlaku v prvej časti bola $v_0 = \frac{15\ \mathrm{km}}{0{,}50\ \mathrm{h}} = 30\ \mathrm{km/h}$ 3 body

c) Dĺžka trate $s = v_0 t_c = \left(30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)(4{,}00\ \mathrm{h}) = 120\ \mathrm{km}$. 2 body

d) Zelene vyznačená časť ukazuje graf rýchlosti podľa cestovného poriadku. Modrá (plná) čiara ukazuje graf rýchlosti ako funkciu času, keď vlak musel zastaviť po hodine jazdy. Červená (čiarkovaná) čiara ukazuje graf rýchlosti ako funkciu času v prípade, keď miesto zastavenia je o 45 km ďalej v smere jazdy (o 1,5 h neskôr, než v prvom prípade).



2 body

2) Zložitý elektrický obvod

Riešenie:

a) Odpory R_2 a R_4 zvolíme nekonečne veľké, inými slovami na týchto miestach prerušíme obvod.

$R_{AB} = R_1 + R_3 + R_5 = 8{,}0\ \Omega.$ 4 body

b) Odpory $R_2 = R_4 = 0$, inými slovami tieto vetve skratujeme.

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+5+3}{15} = \frac{23}{15} \Rightarrow R_{AB} = \frac{15}{23}\,\Omega = 0{,}65\ \Omega.$$

4 body

c) Zvolíme $R_4 = R_1$ a $R_3 = R_2$. vtedy sú body C a D v obvode rovnocenné a rezistorom R_5 nemôže tiecť elektrický prúd, preto nemá vplyv na elektrický odpor medzi bodmi A a B.

2 body

3) Objem valčeka v ľade

Riešenie:

a) $$\rho_L\left(a^3 - \frac{2}{3}V_v\right) + \rho_{Al}V_v = \rho_V\left(a^3 + \frac{1}{3}V_v\right),$$

odkiaľ máme $V_v = \dfrac{3(\rho_V - \rho_L)}{3\rho_{Al} - \rho_V - 2\rho_L}\,a^3 \approx 45{,}6\ \text{mm}^3$. 2 body

b) Akýkoľvek fyzikálne prijateľný argument, z ktorého vyplynie, že hustota valčeka v kockách v pohári 1 je väčšia, ako hustota ľadu. 2 body

Jedným z jednoduchších argumentov je napr.: Kocka v pohári 1 sa vznáša vo vode, preto priemerná hustota kocky s valčekom sa musí rovnať hustote vody ρ_V. Z toho vyplýva, že hustota valčeka ρ_1 musí byť väčšia, ako hustota ľadu, aj vody.

Obdobne, priemerná hustota kocky ľadu s valčekom musí byť rovný hustote neznámej kvapaliny. Keby hustota neznámej kvapaliny bola rovnaká ako hustota ľadu, valček by musel mať tiež hustotu ľadu a žiadna orientácia by nebola stabilná. Ak by mala neznáma kvapalina ρ_n väčšiu hustotu ako ľad, valček by musel mať tiež (inak by sa nevznášal s kockou). Orientácia by ale musela byť podobná, akú vidíme v pohári 1. Z toho vyplýva, že kvapalina má menšiu hustotu ako ľad a hustota ρ_2 valčeka je menšia, ako hustota ρ_n neznámej kvapaliny.

c) V pohári 1 klesne na dno, lebo množstvo ľadu sa zmenší, tým sa priemerná hustota kocky ľadu s valčekom sa zväčší. 2 body

d) Poklesne, lebo hustota roztopenej vody je väčšia, ako hustota ľadu, a tým aj hustota valčeka. Množstvo ľadu pokleslo, ale množstvo vody narastá, preto priemerná hustota kocky ľadu s valčekom a so zlepenou kvapkou vody je väčšia ako hustota neznámej kvapaliny 2 body

e) Ak sa kvapka vody od kocky ľadu oddelí (a poklesne na dno) ľad s valčekom už majú menšiu priemernú hustotu ako neznáma kvapalina a preto začne stúpať. 2 body

4) Výťah z nebies

Riešenie:

a) Pri klesaní platformy sa mení polohová energia platformy s nákladom na teplo. Polohová energia platformy s nákladom $E_p = (M + M_p)gh$, 1 bod

pričom $k_1 = 40$ % tejto polohovej energie sa zmení na teplo $Q_{Al} = k_1 E_p$, 1 bod

Hmotnosť hliníkovej tyče $M_{Al} = \rho_{Al} Sh$. 1 bod

Podľa kalorimetrickej rovnice

$k_1(M + M_p)gh = Q_{Al} = M_{Al} c_{Al} \Delta t_{Al} = \rho_{Al} Sh c_{Al} \Delta t_{Al}$ 1 bod

$\Delta t_{Al} = \frac{k_1(M+M_p)g}{\rho_{Al} S c_{Al}} = 6{,}36\ °C$ 1 bod

b) Podľa kalorimetrickej rovnice

$k_1(M + M_p)gh = Q_{Cu} = M_p c_{Cu} \Delta t_{Cu}$ 1 bod

$h = \frac{M_p c_{Cu} \Delta t_{Cu}}{k_1(M+M_p)g} = 200$ m. 2 body

c) Bod varu vody pri normálnom tlaku 1 bod

Očakávaná zmena teploty $\Delta t = 80\ °C$

$H = h \frac{\Delta t}{\Delta t_{Cu}} = 1{,}99$ km 1 bod

5) Vesmírne smetie

Riešenie:

a) Pomer počtu všetkých (aktívnych aj neaktívnych) satelitov k počtu aktívnych satelitov $k = \frac{7389}{4852} \approx 1{,}523$. Zo zadania vyplýva, že hmotnosť všetkých satelitov v danej vrstve sa rovná $M = kM_a$, kde M_a je súhrnná hmotnosť aktívnych satelitov v danej vrstve 1 bod

Počet úlomkov v tejto vrstve je potom $N = M/m$ 1 bod

Objem medzi guľou s polomerom R_2 a s polomerom R_1 je $V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$. Tento objem predelíme počtom úlomkov vo vrstve (N). Najmenší objem na jeden úlomok v priemere pripadá na vrstvu 5 1 bod

$V_1 \approx 8{,}0$ km^3. 1 bod

b) Tu existuje viac prístupov. Hodnotíme fyzikálnu korektnosť navrhnutej metódy. Napríklad, jeden z jednoduchších prístupov predpokladá, že $\ell^3 \approx V_u$, teda $\ell \approx \sqrt[3]{V_u}$, ale môže byť tiež

$\frac{4}{3}\pi\ell^3 \approx V_u \quad \Rightarrow \quad \ell \approx \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V_u} \approx 0{,}62\sqrt[3]{V_u}$ 2 body

Táto vzdialenosť $\ell \approx 2{,}0$ km (druhý spôsob $\ell \approx 1{,}24$ km). 1 bod

c) Priemerný objem pripadajúci na jeden úlomok je V_u, potom pravdepodobnosť, že úlomok nájdeme v malom objeme V, je približne $p = V/V_u$. 1 bod

Predstavíme si nad plochou solárnych panelov hranol s výškou $h = v_1 t$. Objem hranola $V = Sh$. a všetko, čo je v tomto priestore za čas t narazí do solárnych panelov.

Vo vrstve 4 pre $t = 1{,}0$ s dostaneme $V = (2500\ \mathrm{m^2})\left(7390\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(1{,}0\ \mathrm{s}) \approx 0{,}018\ \mathrm{km^3}$.

Vo vrstve 4 (kde je ISS) pripadá na jeden úlomok objem $V_{u4} \approx 34{,}0$ km^3 do solárneho panelu by narazil úlomok v priebehu jednej sekundy pravdepodobnosťou $p = \frac{V}{V_{u4}} = 0{,}053$ %. 1 bod

Pravdepodobnosťou 50% by úlomok narazil do solárnych panelov za čas

$T = \approx (1{,}0\ \mathrm{s})\frac{50\ \%}{p} = 920\ \mathrm{s}.$ 1 bod

Poznámka:

Vzhľadom na jednoduché úvahy sa jedná o veľmi dobrý odhad (presnejší výpočet dáva 1276 s).

p. č. vrstvy	R1/km	počet aktívnych satelitov vo vrstve	Súhrnná hmotnosť aktívnych / kg	Súhrnná hmotnosť všetkých m / kg	počet úlomkov	objem na 1 úlomok V/km^3	priemerná vzdialenosť ℓ_{an}/km	druhý variant vzdialenosti ℓ_{an}/km	priemerná rýchlosť /(km/s)	Pravdepod. zásahu za jeden deň /(%)	Doba zásahu pravd. 50%/ s
1	150	5	2 700	4 112	41 117 683	656,2	8,69	5,39	7,70	0,003	17043
2	200	189	110 872	168 844	1 688 444 369	32,7	3,20	1,98	7,61	0,058	859
3	300	191	71 418	108 761	1 087 608 413	52,3	3,74	2,32	7,50	0,036	1395
4	400	579	113 153	172 318	1 723 181 197	34,0	3,24	2,01	7,39	0,054	920
5	500	2 156	492 095	749 400	7 494 002 380	8,0	2,00	1,24	7,28	0,226	221
6	600	281	160 105	243 820	2 438 202 484	25,5	2,94	1,82	7,18	0,071	709
7	700	94	83 411	127 025	1 270 247 071	50,3	3,69	2,29	7,08	0,035	1420
8	800	50	61 162	93 142	931 422 131	70,5	4,13	2,56	6,98	0,025	2019
9	900	15	34 695	52 836	528 362 232	127,7	5,04	3,12	6,89	0,013	3709
10	1000	592	254 415	387 443	3 874 427 937	4 315,5	16,28	10,09	4,25	0,000	203161
11	10000	38	55 272	84 172	841 724 666	69 473,9	41,11	25,49	2,36	0,000	5886525
12	20000	91	119 692	182 276	1 822 762 135	68 452,7	40,91	25,36	1,61	0,000	8513073
13	30000	569	2 177 907	3 316 685	33 166 848 357	6 518,6	18,68	11,58	1,22	0,000	1069038

Tab. RE–1 - Pre kontrolu výsledkov pre rôzne vrstvy

6) Kotúľajúca sa guľa

Riešenie:

a) Medená doska sa zohreje na teplotu t_{a1} a kalorimetrická rovnica znie

$m_1 c_{\mathrm{Au}}(t_1 - t_{\mathrm{a1}}) = m_2 c_{\mathrm{Cu}}(t_{\mathrm{a1}} - t_2 - \Delta t),$ 2 bod

odkiaľ $t_{\mathrm{a1}} = \frac{m_1 c_{\mathrm{Au}} t_1 + m_2 c_{\mathrm{Cu}}(t_2 + \Delta t)}{m_1 c_{\mathrm{Au}} + m_2 c_{\mathrm{Cu}}} = 58{,}6\ °\mathrm{C}.$ 1 bod

b) Ďalej riešime v dvoch krokoch. Najprv vypočítame vyrovnanie teplôt na t_{a2} medzi guľou a olovenou doskou

$m_1 c_{\mathrm{Au}}(t_{\mathrm{a1}} - t_{\mathrm{a2}}) = m_3 c_{\mathrm{Pb}}(t_{\mathrm{a2}} - t_3),$ 1 bod

odkiaľ $t_{\mathrm{a2}} = \frac{m_1 c_{\mathrm{Au}} t_{\mathrm{a1}} + m_3 c_{\mathrm{Pb}} t_3}{m_1 c_{\mathrm{Au}} + m_3 c_{\mathrm{Pb}}} = 32{,}9\ °\mathrm{C}.$ 1 bod

Polohová energia gule sa rozloží tak, aby výsledná teplota gule a olovenej dosky sa rovnala (označme t_{a3})

$E_{\mathrm{pa}} = m_1 g h_1 = 39{,}2\ \mathrm{J} = m_1 c_{\mathrm{Au}} \Delta t_{\mathrm{p1}} + m_3 c_{\mathrm{Pb}} \Delta t_{\mathrm{p1}},$ 1 bod

kde $\Delta t_{\mathrm{p1}} = t_{\mathrm{a3}} - t_{\mathrm{a2}}$, a dostaneme

$\Delta t_{\mathrm{p1}} = \frac{m_1 g h_1}{m_1 c_{Au} + m_2 c_{\mathrm{Pb}}} = 0{,}03\ °\mathrm{C}$ a je prakticky zanedbateľná

teda $t_{\mathrm{a3}} = t_{\mathrm{a2}} + \Delta t_{\mathrm{p1}} \approx t_{\mathrm{a2}} \approx 32{,}9\ °\mathrm{C}$ 1 bod

c) Výška h_2 by mala byť taká, aby potenciálna energia zlatej gule premenená na teplo spôsobila výsledné zvýšenie teploty zlatej gule s olovenou doskou o

$t_{\mathrm{c}} - \mathrm{t}_{a2} = \Delta t_{\mathrm{p2}} = 1{,}1\ °\mathrm{C}$. Musí platiť 1 bod

$E_{\mathrm{pc}} = m_1 g h_2 = m_1 c_{\mathrm{Au}} \Delta t_{\mathrm{c}} + m_3 c_{\mathrm{Pb}} \Delta t_{\mathrm{c}}$ 1 bod

odkiaľ $h_2 = \frac{(m_1 c_{\mathrm{Au}} + m_3 c_{\mathrm{Pb}})\Delta t_{\mathrm{c}}}{m_1 g} = 43{,}7\ \mathrm{m}$ 1 bod

7) Ľad a soľ - experimentálna úloha

Podľa úrovne spracovania 0 až 10 bodov

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie E*

Autor návrhov úloh: Aba Teleki
Recenzia: Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022