64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória A

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Detektor zrýchlenia

Riešenie:

a) Pri dĺžke dutiny trubice x_1 je jej objem $V_1 = S x_1$. Tlak pary (ako ideálneho plynu) vytvorenej v dutine s objemom V_1 z kvapky s hmotnosťou m_0 je

$$p_\mathrm{n} = \frac{m_0}{M_\mathrm{m}} \frac{R\,T_0}{V_0}\text{, odkiaľ dostávame}$$

$$m_0 = \frac{M_\mathrm{m}\, p_\mathrm{n}}{R\,T_0} \frac{\pi d^2}{4} x_1 \approx 27{,}1\ \mathrm{mg}.$$ 2 b

(*Pozn.: Priemer guľovej kvapky s touto hmotnosťou je 3,7 mm*)

b) Pre zmenené teploty

$$m_0 = \frac{M_\mathrm{m}\, p_\mathrm{n}}{R\,T_0} \frac{\pi d^2}{4} x_1 = \frac{M_\mathrm{m}\, p_\mathrm{n1}}{R\,T_0} \frac{\pi d^2}{4} x_{11} = \frac{M_\mathrm{m}\, p_\mathrm{n2}}{R\,T_0} \frac{\pi d^2}{4} x_{12}\,.$$

Odtiaľ máme $x_{11} = \frac{p_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n1}} x_1 \approx 5{,}031\ \mathrm{m}$ a $x_{12} = \frac{p_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n2}} x_1 \approx 4{,}969\ \mathrm{m}$. 2 b

c) Ak posunieme piest z polohy x_1 (pri teplote t_0) do polohy $x_2 = x_1 + \Delta x$, je tlak pary

$$p_2 = \frac{m_0}{M_\mathrm{m}} \frac{R T_0}{S\, x_2} = \eta\, p_\mathrm{n}\,.$$

Odtiaľ máme

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{m_0}{M_\mathrm{m}} \frac{R T_0}{\eta\, p_\mathrm{n} S} - \frac{m_0}{M_\mathrm{m}} \frac{R T_0}{p_\mathrm{n} S} = x_1 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \approx 5{,}0\ \mathrm{mm}.$$ 1 b

d) Para v trubici predstavuje teleso s hmotnosťou m_0. Pri zrýchlení a_m je tlak na dolnom konci p_n a na hornom p_3, pričom platí

$$m_0\, a_\mathrm{m} = (p_\mathrm{n} - p_3)\, S\,. \tag{1}$$

Určíme rozloženie tlaku pozdĺž trubice. Pre dĺžkový element stĺpca pary máme

$$\mathrm{d}m\, a_\mathrm{m} = \left[p(x) - p(x + \mathrm{d}x) \right] S = -S\, \mathrm{d}p\,.$$

Zo stavovej rovnice

$$p\, S\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}m}{M_\mathrm{m}} R\, T_0 \text{ určíme hmotnosť elementu } \mathrm{d}m = \frac{S\, M_\mathrm{m}}{R\, T_0} p\, \mathrm{d}x\,.$$

Po dosadení dostávame rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M_\mathrm{m}\, a_\mathrm{m}}{R\, T_0} \mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Jej integráciou dostávame

$$\ln \frac{p}{p_\mathrm{n}} = -\frac{M_\mathrm{m}\, a_\mathrm{m}}{R\, T_0} x\text{, resp. } p(x) = p_\mathrm{n}\, \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} a_\mathrm{m}}{R T_0} x}\text{, a teda } p_3 = p_\mathrm{n}\, \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} a_\mathrm{m}}{R T_0} x_2}\,.$$

S použitím rovnice (1) po úprave dostaneme

$$\frac{m_0}{p_\mathrm{n}\,S}\,a_\mathrm{m} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m}\,x_2}{R\,T_0}\,a_\mathrm{m}} \,. \qquad 1\text{ b}$$

Ide o iracionálnu rovnicu, ktorú možno riešiť pre neznámu a_m numericky alebo graficky pre dané hodnoty.

Keďže ale $\frac{M_\mathrm{m}\,x_2}{R\,T_0} \approx 4{,}9\times10^{-4}\ \mathrm{m^{-1}\cdot s^2}$, pre reálne zrýchlenia až 100 g je exponent $x << 1$, a je teda možné použiť aproximáciu $\mathrm{e}^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2}$. Rovnica potom dostáva lineárny tvar

$$\frac{m_0}{p_\mathrm{n}\,S}\,a_\mathrm{m} = 1 - \left[1 - \frac{M_\mathrm{m}\,x_2}{R\,T_0}\,a_\mathrm{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{M_\mathrm{m}\,x_2}{R\,T_0}\,a_\mathrm{m}\right)^2\right], \qquad 1\text{ b}$$

odkiaľ dostávame

$$a_\mathrm{m} = 2\left(\frac{M_\mathrm{m}\,x_2}{R\,T_0} - \frac{m_0}{p_\mathrm{n}\,S}\right)\left(\frac{R\,T_0}{M_\mathrm{m}\,x_2}\right)^2 = \frac{2\eta(1-\eta)R\,T_0}{M_\mathrm{m}\,x_1} \approx 54{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 5{,}52\ g. \qquad 1\text{ b}$$

e) Ak sa zrýchlenie zvýši, vzrastie tlak pri okienku, čo vyvolá kondenzáciu pary až kým tlak neklesne na hodnotu p_n. Vzniká vrstvička vody s hrúbkou $h << x_1$ a hmotnosťou $m_\mathrm{v} = \rho_\mathrm{v}\,S\,h$. Hmotnosť pary je $m = m_0 - m_\mathrm{v}$. Opakujeme postup pri určení a_m so zmenenou hmotnosťou pary.

$$m\,a = (p_\mathrm{n} - p_4)\,S\,, \quad p_4 = p_\mathrm{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m}\,a}{R\,T_0}\,x_2} \approx p_\mathrm{n}\left[1 - \frac{M_\mathrm{m}\,a}{R\,T_0}\,x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M_\mathrm{m}\,a}{R\,T_0}\,x_2\right)^2\right].$$

Odtiaľ dostávame

$$h = \frac{m_\mathrm{v}}{\rho_v\,S} = \frac{p_\mathrm{n}}{2\rho_v}\left(\frac{M_\mathrm{m}\,x_1}{\eta\,R\,T_0}\right)^2 (a - a_\mathrm{m})\,. \qquad 1\text{ b}$$

Pre $a_{10} = 10\ g$ dostávame $h_{10} = 70{,}2$ nm. 0,5 b

f) Zdá sa, že to nebol dobrý nápad. Teoreticky to síce funguje, má to však niekoľko nedostatkov.
- prístroj zaberá veľa miesta
- jeho citlivosť nevyhovuje reálnym podmienkam - pre reálne zrýchlenia je vrstvička kondenzovanej vody príliš malá i pre interferenčné meranie
- má vysoké požiadavky na konštantnú teplotu – len malá odchýlka teploty prístroj znefunkční.

0,5 b

2) Urýchľovač elektrónov

Riešenie:

a) Elektróny v urýchľovačoch dosahujú rýchlosti blízke rýchlosti svetla vo vákuu, preto použijeme relativistický výpočet. Pri prechode potenciálovým rozdielom U vykoná elektrické pole prácu $W_1 = e\,U_{01}$ (pri orientácii elektrického poľa proti smeru pohybu elektrónu). Táto práca je rovná zmene kinetickej energie

$$\Delta E_\mathrm{k} = W\,, \text{ tzn. } \gamma m c^2 - m c^2 = eU_{01}, \text{ kde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\,. \qquad (1)$$

Odtiaľ máme $v_1 = c\sqrt{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{eU_{01}}{mc^2}\right)^2}}$.

Pre dané hodnoty $v_1 \approx 0{,}374\,c \approx 1{,}12\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1,5 b

Energia urýchlených elektrónov $E_{\mathrm{k1}} = eU_{01}$.

Pre dané hodnoty $E_{\mathrm{k1}} \approx 6{,}41\times10^{-15}\ \mathrm{J} \approx 40\ \mathrm{keV}$. 0,5 b

b) Z rovnice (1) vyjadríme napätie pre rýchlosť v_2.

$$U_{02} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}-1\right)\frac{m\,c^2}{e}$$, pre dané hodnoty veličín $U_{02} \approx 3{,}11$ MV. 1 b

c) Pre maximálne urýchlenie je potrebné, aby elektrón prelietaval medzerou medzi valcami v okamihu, keď dosahuje napätie medzi susednými valcami maximálnu hodnotu U_m rovnú amplitúde napätia zdroja v smere proti smeru pohybu elektrónu. Keďže napätie na susedných medzerách je posunuté vždy o π/2 rad, musí prejsť elektrón medzi dvomi medzerami za polperiódu $\Delta t = T/2 = 1/2f$ napätia zdroja. Keďže rýchlosť elektrónu postupne rastie, musí sa tomu prispôsobiť dĺžka valcov a medzier. Keďže medzerou elektrón prechádza počas zmeny fázy $\Delta\varphi = 0{,}10$ rad a zvyšok polperiódy (π – 0,1) rad, je pomer časov prechodu medzerou a valcom 0,1/(π–0,1) ≈ 3,3 %. Nerovnomernosť rýchlosti v medzere preto môžeme zanedbať a dĺžku medzi stredmi medzier určíme približne ako súčin rýchlosti v_n a periódy napätia.

Pre získanie energie E = 1 MeV pri napätí U_m = 50 kV potrebujeme N = E/eU_m = 20 valcov.

2 b

Rýchlosť, ktorú elektrón získa medzi katódou K a n–tým valcom A_n, tzn. n–násobným prechodom potenciálnym rozdielom U, dostaneme z rovnice

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_n^2}{c^2}}}-1\right)mc^2 = neU_\mathrm{m}$$, odkiaľ máme $v_n = c\sqrt{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{neU_\mathrm{m}}{mc^2}\right)^2}}$.

Dĺžka jednej sekcie (medzi stredmi medzier)°pri uvedenom zjednodušení

$\ell_n \approx v_n \dfrac{1}{2f}$, dĺžka n–tého valca $d_n \approx \dfrac{\pi-0{,}1}{\pi}\dfrac{v_n}{2f}$ a šírka medzery $\delta_n \approx \dfrac{0{,}1}{\pi}\dfrac{v_n}{2f}$.

Šírka prvého valca

$$d_n \approx \frac{\pi-0{,}1}{\pi}\frac{c}{2f}\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{eU_\mathrm{m}}{mc^2}\right)^2}}$$, pre dané hodnoty $d_n \approx 8{,}0$ cm, 1 b

$$d_{20} \approx \frac{\pi-0{,}1}{\pi}\frac{c}{2f}\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{20\,eU_\mathrm{m}}{mc^2}\right)^2}}$$, pre dané hodnoty $d_{20} \approx 18{,}2$ cm. 1 b

Celková dĺžka urýchľovača

$$L = \sum_{1}^{20} \ell_n = \frac{1}{2f} \sum_{1}^{20} v_n \ .$$

Rýchlosť v_n sa mení nelineárne. Súčet hodnôt rýchlostí môžeme približne odhadnúť napr. tak, že určíme rýchlosti na štyroch valcoch (najväčšia zmena je na prvých valcoch, na najvyšších sa rýchlosť približuje c a príliš sa už nemení – zvolíme teda body 0, 5, 12, 20) a rýchlosti medzi nimi budeme interpolovať

$v_0 = 0$, $v_5 = 0{,}74\, c$, $v_{12} = 0{,}89\, c$, $v_{20} = 0{,}94\, c$.

$$\sum_{1}^{20} v_n \sim \frac{v_0 + v_5}{2}\, 5 + \frac{v_5 + v_{12}}{2}\, 7 + \frac{v_{12} + v_{20}}{2}\, 8 \ \approx 14{,}88\, c.$$

Potom $L \approx 2{,}98$ m.

Pre body 0, 1, 4, 10, 20 dostaneme $v_0 = 0$, $v_1 = 0{,}41\, c$, $v_4 = 0{,}70\, c$, $v_{10} = 0{,}86\, c$, $v_{20} = 0{,}94\, c$ a

$$\sum_{1}^{20} v_n \sim \frac{v_0 + v_1}{2}\, 1 + \frac{v_1 + v_4}{2}\, 3 + \frac{v_4 + v_{10}}{2}\, 6 + \frac{v_{10} + v_{20}}{2}\, 10 \ \approx \ 15{,}55\, c.$$

$L \approx 3{,}11$ m.

Pozn.: Pri väčšom počte bodov sa výpočet spresňuje a opačne. Keby sa uvažoval lineárny nárast, $L \approx (v_{20}/2)\times 20/(2f) \approx 1{,}88$ m.

Pri presnom výpočte, tzn. sčítaní všetkých 20 *rýchlostí, je výsledok* $L = 3{,}26$ m.

Za správny odhad možno považovať výsledok $L = (3{,}0 \pm 0{,}3)$ m. 2 b

d) Pri dopade na terč elektrón odovzdá svoju kinetickú energiu terču a spôsobí zvýšenie vnútornej energie. To môže znamenať zvýšenie energie kmitov mriežky, ktoré sa prejaví zvýšením teploty, alebo zvýšením energie (excitáciou) jednotlivého atómu. V optimálnom prípade atóm celú túto energiu vyžiari vo forme kvanta energie – fotónu.

Pre tento optimálny prípad je energia fotónu maximálna, a teda vlnová dĺžka minimálna.

$$E = h\, f_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}, \text{ odkiaľ máme } \lambda_{\min} = \frac{hc}{E}.$$

Pre dané hodnoty $\lambda_{\min} \approx 1{,}24\times 10^{-12}$ m, čo predstavuje röntgenové žiarenie. 1 b

3) Elektrický obvod

Riešenie:

a) Obidve vetvy dvojpólu majú rovnakú impedanciu. Impedancia dvojpólu $\mathbf{Z}_{\mathrm{AO}}$ je tak

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{ZO}} = \frac{1}{2}\left(r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right). \qquad (1)$$

Prúd zdroja

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{U}}{R + R_{\mathrm{N}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{ZO}}} = \frac{\mathbf{U}}{R + R_{\mathrm{N}} + \frac{1}{2}\left(r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)} = \frac{\mathbf{U}}{R + R_{\mathrm{N}} + \frac{r}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Efektívna hodnota prúdu je

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(R + R_{\mathrm{N}} + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2)$$

1 b

Pre $R_N = 0\ \Omega$ je prúd maximálny, ak je menovateľ minimálny, a teda pre $\omega = \omega_0$, keď platí

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 . \text{ Odtiaľ máme } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{, resp. } f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \approx 948 \text{ Hz.}$$ 0,5 b

Hodnota maximálneho prúdu pre frekvenciu ω_0 a $R_N = 0\ \Omega$

$$I_m = \frac{2U}{2R + 2R_N + r} \approx 1{,}71 \text{ A.}$$ 0,5 b

b) Tepelný výkon uvoľnený v dvojpólu (elektrický príkon rezistívnej zložky cievok)

$$P = 2r\left(\frac{I}{2}\right)^2 = \frac{2rU^2}{\left(2R + 2R_N + r\right)^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} . \qquad (3)$$ 1 b

Výkon má tiež maximálnu hodnotu pri frekvencii f_0 a $R_N = 0\ \Omega$

$$P_m = \frac{2r}{\left(2R + r\right)^2} U^2 \approx 58{,}8 \text{ W.}$$ 0,5 b

c) Stanovíme napätia medzi pólmi A, B a pólom O

$$\mathbf{U}_{AO} = \frac{1}{j\omega C}\frac{\mathbf{I}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega C}\frac{\mathbf{U}}{R + R_N + \dfrac{r}{2} + j\dfrac{1}{2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} ,$$

$$\mathbf{U}_{BO} = \left(r + j\omega L\right)\frac{\mathbf{I}}{2} = \frac{1}{2}\left(r + j\omega L\right)\frac{\mathbf{U}}{R + R_N + \dfrac{r}{2} + j\dfrac{1}{2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} .$$

Napätie $\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{U}_{AO} - \mathbf{U}_{BO}$, a teda

$$\mathbf{U}_{AB} = \left[\frac{1}{j\omega C} - \left(r + j\omega L\right)\right]\frac{\dfrac{1}{2}\mathbf{U}}{R + R_N + \dfrac{r}{2} + j\dfrac{1}{2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} ,$$

po úprave napr.

$$\mathbf{U}_{AB} = -\mathbf{U}\frac{\dfrac{r}{2} + j\dfrac{1}{2}\left(\omega L + \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R + R_N + \dfrac{r}{2} + j\dfrac{1}{2}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} . \qquad (4)$$

Efektívna hodnota

$$U_{AB} = U\sqrt{\frac{r^2 + \left(\omega L + \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{\left(2R + 2R_N + r\right)^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} , \qquad (5)$$ 1 b

fázový rozdiel

$$\varphi_{AB} = \pi + \arctan\frac{\omega L + \dfrac{1}{\omega C}}{r} - \arctan\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{2R + 2R_N + r} . \qquad (6)$$ 1 b

d) Ak má byť napätie U_{AB} frekvenčne nezávislé, musí byť výraz pod odmocninou vo vzťahu (5) byť rovný konštante

$$\frac{r^2+\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=k\,,$$

odkiaľ máme

$$r^2+\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)^2=k\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^2+k\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2,$$

a po úprave

$$r^2+4\frac{L}{C}=k\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^2+\left(k-1\right)\left[\left(\omega L\right)^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right].$$

Člen obsahujúci frekvenciu vylúčime, ak k = 1. Pre odpor R_{N1} potom dostávame

$R_{\mathrm{N1}}=\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\frac{L}{C}}-R-\frac{r}{2}$. Pre dané hodnoty $R_{\mathrm{N1}} \approx 288\ \Omega$. (7) 1 b

Pozn.: Odpor R_{N1} možno určiť i nasledujúcim postupom pomocou derivácie.

Lokálny extrém funkcie určíme pomocou nulovej hodnoty derivácie funkcie podľa premennej ω. Extrém výrazu (5) pre U_{AB} je aj extrémom funkcie pod odmocninou, stačí teda derivovať iba ten. Derivácia podielu má v menovateli kladný kvadrát menovateľa zlomku, preto pre určenie extrému funkcie skúmame iba nulovú hodnotu čitateľa derivácie funkcie

$$\mathrm{f}(\omega)=\frac{\mathrm{u}(\omega)}{\mathrm{v}(\omega)}=\frac{r^2+\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\ .$$

Čitateľ derivácie podľa premennej ω (pozri pomôcka v zadaní) je

$$2\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)\left[\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]-2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\left(L+\frac{1}{\omega^2 C}\right)\left[r^2+\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)^2\right].$$

Lokálny extrém (maximum/minimum) je daný podmienkou nulovej hodnoty tejto funkcie. Po úprave máme dostávame rovnicu

$$\frac{8}{\omega}\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\left[\left(R+R_{\mathrm{N}}\right)\left(R+R_{\mathrm{N}}+r\right)-\frac{L}{C}\right]=0\ .$$

Rovnici vyhovujú dve riešenia

i. $\omega L-\frac{1}{\omega C}=0,$

ii. $\left(R+R_{\mathrm{N}}\right)\left(R+R_{\mathrm{N}}+r\right)-\frac{L}{C}=0.$ (8)

V prvom prípade ide o lokálny extrém pri frekvencii

$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\omega_0.$ 0,5 b

V druhom prípade je derivácia nulová nezávisle od frekvencie, a tak funkcia $U_{AB}(\omega)$ je konštantná, čo zodpovedá aj prvej časti úlohy d).

Z kvadratickej rovnice (8)

$$\left(R+R_{\mathrm{N}}\right)^{2}+2\,\frac{r}{2}\left(R+R_{\mathrm{N}}\right)-\frac{L}{C}=0$$

určíme hodnotu odporu R_{N1}

$$R_{\mathrm{N1}}=\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^{2}+\frac{L}{C}}-\left(R+\frac{r}{2}\right)\text{, čo zodpovedá výsledku (7).}$$

Extrém teda existuje pre $R_N \neq R_{N1}$. 0,5 b

Či ide o maximum alebo minimum možno zistiť pomocou druhej derivácie funkcie f(ω). Výsledok však možno určiť jednoduchou úvahou.

Pre $\omega = \omega_1$ je napätie extrému

$$U_{\mathrm{AB}}=U\sqrt{\frac{r^{2}+4\,\dfrac{L}{C}}{\left(2R+2R_{\mathrm{N}}+r\right)^{2}}}\,. \qquad (9)$$

Pre veľké hodnoty R_N (v limite $R_N \to \infty$) vzťah (9) konverguje k nule, tzn. pre $R_N > R_{N1}$ ide o minimum funkcie. Maximum tak potom dostávame pre $R_N > R_{N1}$. 0,5 b

e) Po dosadení do vzťahu (9) dostávame:

$U_{AB1} \approx 150$ V, $U_{AB2} \approx 767$ V, $U_{AB3} \approx 50{,}2$ V. 1,5 b

Fázový rozdiel φ_{AB} (6) pre frekvenciu f_1 je

$$\varphi_{\mathrm{AB1}}=\pm\,\pi+\arctan\left(\omega_{1}\frac{L}{r}+\frac{1}{\omega_{1}\,r\,C}\right)=\pm\,\pi+\arctan\left(\frac{2}{\omega_{1}\,r\,C}\right)$$

a nezávisí od hodnoty R_N. Pre dané hodnoty $\varphi_{AB1} \approx -93°$. 0,5 b

Pozn.: Znamienko (-) vo vzťahu (4)predstavuje posunutie fázy o $\pm\pi$ rad. Zvyčajne volíme posunutie tak, aby bol výsledný fázový rozdiel < 180°. Vzhľadom na periodicitu 2π je však správny i výsledok $\varphi_{AB1} = -93° + 360° = 267°$.

4) Premena plutónia

Riešenie:

a) V dôsledku absorpcie neutrónu sa izotop $^{238}\mathrm{U}$ premení na izotop $^{239}\mathrm{U}$

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \;\rightarrow\; ^{239}_{92}\mathrm{U}\,.$$

Nestabilný izotop $^{239}\mathrm{U}$ sa prirodzenou premenou mení na $^{239}\mathrm{Pu}$. Keďže sa hmotnostné číslo nemení, môže ísť iba o β–premenu, pri ktorej sa nemení hmotnostné číslo, ale zväčšuje sa atómové číslo

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \;\rightarrow\; ^{239}_{92}\mathrm{U} \;\rightarrow\; ^{239}_{93}\mathrm{Np} + \,^{0}_{-1}\mathrm{e} \;\rightarrow\; ^{239}_{94}\mathrm{Pu} + \,^{0}_{-1}\mathrm{e}\,.$$

Po β–premenách sa izotop $^{239}\mathrm{U}$ zmení najprv na neptúnium a potom na plutónium. 2 b

b) Rovnica α–premeny

$$^{239}_{94}\mathrm{Pu} \;\rightarrow\; ^{235}_{92}\mathrm{U} + \,^{4}_{2}\alpha\,.$$

Pri nej vzniká izotop uránu $^{235}\mathrm{U}$. 1 b

c) Pri premene sa zachováva hybnosť a kinetická energia sa rozdelí medzi jadro $^{235}\mathrm{U}$ a α–časticu

$$p_\alpha = p_\mathrm{U} \quad \text{a} \quad E = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\mathrm{U}^2}{2m_\mathrm{U}} = E_\alpha + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{m_\alpha}{m_\mathrm{U}} = E_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\mathrm{U}}\right), \text{ odkiaľ máme}$$

$$E_\alpha = E\,\frac{m_\mathrm{U}}{m_\mathrm{U} + m_\alpha} \approx 5{,}16\ \mathrm{MeV}. \qquad 2\ \mathrm{b}$$

d) Prirodzenú premenu opisuje zákon

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N = -\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} N\ ,$$

kde N je počet nepremenených atómov látky.

V vzorke sa nachádza počet atómov

$$N = n N_\mathrm{A} = \frac{m}{M_\mathrm{mU}} N_\mathrm{A} = \frac{\rho_\mathrm{Pu}}{M_\mathrm{mU}}\frac{\pi d^3}{6} N_\mathrm{A}\ .$$

Kinetická energia produktov premeny sa odovzdáva štruktúre vzorky vo forme vnútornej energie, tzn. tepelný výkon

$$P = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| E = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}\frac{\rho_\mathrm{Pu}}{M_\mathrm{mU}}\frac{\pi d^3}{6} N_\mathrm{A} E \approx 1{,}28\ \mathrm{W}. \qquad 2\ \mathrm{b}$$

Vzorka má vysokú elektrickú vodivosť, preto veľmi dobre vedie aj teplo, a môžeme predpokladať, že v celom svojom objeme a tiež na svojom povrchu má rovnakú teplotu T.

Vzorka sa zbavuje produkovanej energie vyžarovaním do okolia. Nakoľko plocha dutiny je výrazne väčšia ako plocha plutóniovej vzorky, dutina pôsobí ako prostredie s teplotou T_0. Absorptivita vzorky je v rovnovážnom stave rovná emisivite ε. Pre stav rovnováhy platí, že rozdiel vzorkou vyžiareného výkonu a výkonu absorbovaného vzorkou z okolia

$P = \varepsilon\sigma S\left(T^4 - T_0^4\right)$, kde $S = \pi d^2$ je obsah povrchu gule s priemerom d.

Ustálená teplota vzorky

$$T = \left(\frac{P}{\varepsilon\sigma S} + T_0^4\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\ln 2\ N_\mathrm{A} E \rho_\mathrm{Pu} d}{6\varepsilon\sigma\tau_{1/2} M_\mathrm{mU}} + T_0^4\right)^{\frac{1}{4}} \approx 434\ \mathrm{K} \approx 161\ {}^\circ\mathrm{C}. \qquad 1\ \mathrm{b}$$

e) S únikom α–častíc zo vzorky dochádza k jej nabíjaniu záporným nábojom. Postupne narastá záporný potenciál φ povrchu vzorky. Emitovaná α–častica v optimálnom prípade využije svoju kinetickú energiu E_α na prekonanie príťažlivého potenciálu. Ustálený stav nastane, ak je práca potrebná na prekonanie potenciálu nabitej gule rovná kinetickej energii častice

$$E_\alpha = -2e\varphi_\mathrm{m}\text{, odkiaľ } U = \varphi_\mathrm{m} = -\frac{E_\alpha}{2e} = -\frac{E}{2e}\frac{m_\mathrm{U}}{m_\mathrm{U} + m_\alpha} \approx -2{,}58\ \mathrm{MV}. \qquad 2\ \mathrm{b}$$

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1), Ivo Čáp (2, 3, 4),
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023