

## 64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

### Katégoria A

Krajské kolo – text úloh

#### 1) Detektor zrýchlenia

Spisovateľ vedecko fantastických románov vymyslel zaujímavý spôsob merania zrýchlenia rakety, využívajúci kondenzáciu vodnej pary. Návrh využíva homogénnu kovovú trubicu s vnútornou valcovou dutinou s priemerom  $d = 20,0$  mm a dĺžkou 5,50 m. Vo valci je dokonale tesniaci piest, ktorý možno posúvať pozdĺž valca. Trubica je uložená v smere pohybu rakety a piest je na začiatku na jej zadnom konci. K zadnému koncu sa priloží sklenené okienko s kvapkou vody a posunutím piestu dopredu sa v trubici vytvorí podtlak, ktorý okienko prisaje k trubici. Počas merania sa udržiava konštantná teplota trubice, a tým aj jej obsahu,  $t_0 = 20,0$  °C. Pri pomalom posúvaní piestu smerom k prednému koncu sa voda z okienka postupne odparuje a dutinu trubice vyplňuje vznikajúca para. Kým sa neodparí všetka voda, je v trubici para nasýtená s tlakom  $p_1 = p_n$ . Tlak nasýtenej pary pri rôznych teplotách je v nasledujúcej tabuľke.

Teplota $t_0$ (°C)	19,9	20,0	20,1
Tlak $p_n$ (hPa)	23,226	23,371	23,516

- Určte začiatočnú hmotnosť  $m_0$  kvapky, aby sa práve odparila pri posunutí piesta  $x_1 = 5,000$  m a pri teplote  $t_0 = 20,0$  °C.
- Určte, aké by bolo potrebné posunutie  $x_{11}$ , resp.  $x_{12}$ , aby sa z kvapky s hmotnosťou  $m_0$  práve vytvorila nasýtená para pri teplote trubice  $t_{01} = 19,9$  °C, resp.  $t_{02} = 20,1$  °C.
- Určte ďalšie posunutie  $\Delta x$  piestu z polohy  $x_1$  do novej polohy  $x_2$ , aby sa tlak pary v trubici zmenil na hodnotu  $p_2 = \eta p_n$ , kde  $\eta = 0,999$  pri teplote  $t_0$ .

Keď sa raketa pohybuje so zrýchlením  $a$ , zmení sa rozdelenie tlaku pary pozdĺž trubice. Keď tlak pri okienku vzrastie z hodnoty  $p_2$  na hodnotu  $p_n$ , začne na okienku para kondenzovať a vytvára mikroskopickú vrstvičku vody. Pri ďalšom zvýšení zrýchlenia sa vytvorí na okienku vrstvička vody s hrúbkou  $h$ , ktorú navrhol merať pomocou interferencie svetla na tenkej vrstve.

- Určte minimálne zrýchlenie  $a_m$ , pri ktorom sa začne pozorovať kondenzácia pary.
- Vyjadrite hrúbku  $h$  vrstvičky vody ako funkciu zrýchlenia  $a$ . Určte hrúbku  $h_{10}$  vrstvičky pre zrýchlenie  $a_{10} = 10$  g.
- Na základe získaných výsledkov uvažte a zdôvodnite, či to bol od spisovateľa dobrý nápad.

Hustota vody  $\rho_v = 1,00 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>, plynová konštanta  $R = 8,314$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup>. Vodnú paru považujte za ideálny plyn. Gravitačné pole vlastnej hmoty lode je zanedbateľne malé. Po nastavení polohy piestu sa piest v dutine nepohybuje.

Pri úpravách možno využiť približné vyjadrenie exponenciálnej funkcie  $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$  pre  $|x| \ll 1$ .

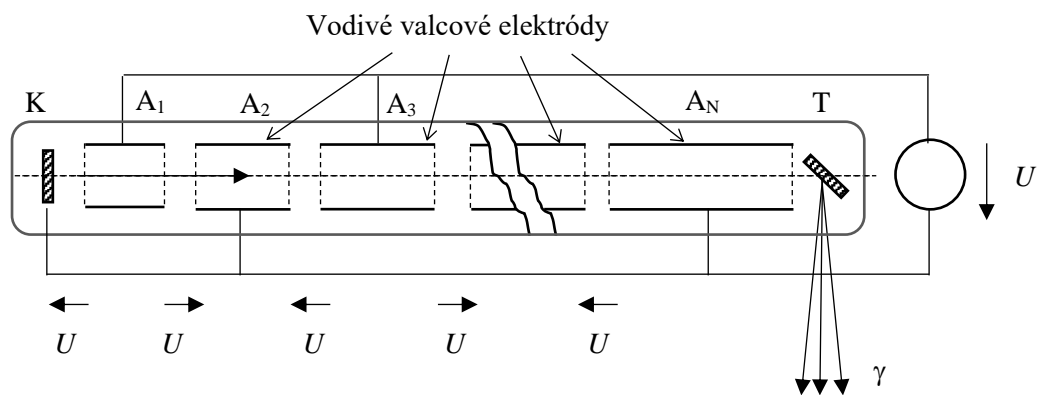
## 2) Urýchľovač elektrónov

Na generovanie zväzku rýchlych elektrónov alebo tvrdého elektromagnetického žiarenia sa používajú rôzne typy urýchľovačov.

Jednoduchý typ, ktorý sa využíva napr. v generátoroch röntgenového žiarenia, v elektrónových mikroskopoch alebo vákuových obrazovkách, pozostáva z katódy a jednej anódy, medzi ktorými je konštantné urýchľovacie napätie.

- Určte rýchlosť  $v_1$  a energiu  $E_e$  elektrónov, urýchlených v jednoduchom urýchľovači pri urýchľovacom napätí  $U_{01} = 40,0$  kV. Energiu vyjadrite v jednotkách J a eV.
- Určte konštantné urýchľovacie napätie  $U_{02}$ , ktoré umožňuje v jednoduchom urýchľovači získať elektróny s rýchlosťou  $v_2 = 0,99 c$ , kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu.

Pre získanie elektrónov s vysokými rýchlosťami blízky rýchlosti svetla by bolo potrebné veľmi vysoké napätie. Tento problém rieši vysokofrekvenčný lineárny urýchľovač, principiálne znázornený na obr. A-1.



Obr. A-1

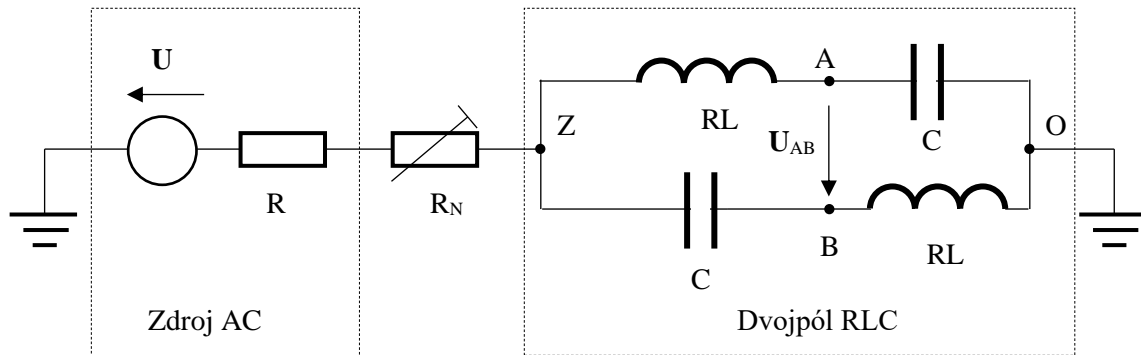
Urýchľovač obsahuje sériu valcových elektród (anód) A<sub>1</sub> až A<sub>n</sub> pripojených striedavo na opačné póly generátora striedavého napätia  $U = U_m \sin \omega t$ . Vo valcoch je elektrické pole nulové, a tak sa elektróny pohybujú konštantnou rýchlosťou. V medzere medzi susednými valcami je pole s napätím  $U$ , ktoré spôsobuje zmenu rýchlosti elektrónov. Ak sa nastaví frekvencia napätia tak, že pri každom prechode medzerou je medzi valcami urýchľovacie napätie  $U_m$ , elektróny sa postupne pri každom prechode medzerou urýchľujú a výsledný efekt zodpovedá urýchľovaciemu napätiu  $NU_m$ , kde N je počet anódových valcov. Šírky medzier sú také, aby počas prechodu elektrónov bolo napätie v rozsahu fázy  $\pm 0,05$  rad okolo maxima  $U_m$  harmonického priebehu (*Pozn.*: v tomto intervale je  $\cos \varphi \approx 1,0$ ). Po zvyšok periódy napätia sú elektróny vo vnútri valcov. Vzhľadom na narastajúcu rýchlosť musí dĺžka valcov v smere pohybu elektrónov narastať.

- Uvažujte urýchľovač, ktorý využíva zdroj elektrického napätia s amplitúdou  $U_m = 50,0$  kV a frekvenciou  $f = 750$  MHz s požadovanou energiou výstupných elektrónov  $E = 1,00$  MeV. Určte počet N valcových elektród, určte dĺžku  $d_1$  prvého a dĺžku  $d_N$  posledného valca, a odhadnite celkovú dĺžku L urýchľovača.
- Urýchlené elektróny dopadajú na terč T a generujú brzdné žiarenie. Určte najmenšiu vlnovú dĺžku  $\lambda_{\min}$  brzdného žiarenia generovaného urýchlenými elektrónmi dopadajúcimi na terč a uveďte, o aký druh elektromagnetického žiarenia ide.

Pri riešení použite hodnoty: hmotnosť elektrónu  $m = 9,109 \times 10^{-31}$  kg, elementárny elektrický náboj  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C, rýchlosť svetla vo vákuu  $c = 2,998 \times 10^8$  m·s<sup>-1</sup>, Planckova konštanta  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  J·s .

### 3) Elektrický obvod

Na obr. A-2 je schéma RLC dvojpólu, ktorý pozostáva z indukčných cievok RL s indukčnosťou  $L = 60 \text{ mH}$  a odporom  $r = 40 \text{ } \Omega$ , kapacitora C s kapacitou  $C = 470 \text{ nF}$ . K dvojpólu je pripojený zdroj s efektívnou hodnotou striedavého napätia  $U = 120 \text{ V}$  s vnútorným odporom  $R = 50 \text{ } \Omega$  cez nastaviteľný rezistor  $R_N$ .



Obr. A-2

- Odvodte vzťah pre efektívnu hodnotu  $I$  prúdu  $I$  zdroja. Pre hodnotu  $R_N = 0 \text{ } \Omega$  určte frekvenciu  $f_0$ , pri ktorej je prúd  $I$  maximálny, a jeho maximálnu hodnotu  $I_m$ .
- Určte tepelný výkon  $P$ , ktorý sa uvoľňuje v dvojpóle, a jeho maximálnu hodnotu  $P_m$  pre  $R_N = 0 \text{ } \Omega$ .
- Odvodte vzťah pre efektívnu hodnotu napätia  $U_{AB}$  medzi uzlami A a B dvojpólu a fázový rozdiel  $\varphi_{AB}$  medzi napätím  $U_{AB}$  a napätím zdroja  $U$ .

Amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku napätia  $U_{AB}(\omega)$  možno významne meniť zmenou hodnoty odporu  $R_N$ .

- Určte hodnotu odporu  $R_{N1}$ , pre ktorú je napätie  $U_{AB}$  frekvenčne nezávislé. Dokážte, že pre určité hodnoty odporu  $R_N$  a pri určitej frekvencii  $f_1$  má funkcia napätia  $U_{AB}(\omega)$  extrémnu hodnotu. Určte frekvenciu  $f_1$  a uveďte, pre aké hodnoty odporu  $R_N$  má funkcia napätia  $U_{AB}(\omega)$  maximum a pre ktoré minimum.
- Určte hodnoty napätia  $U_{AB}$  a fázového rozdielu  $\varphi_{AB}$  pre frekvenciu  $f_1$  a hodnoty odporu nastaviteľného rezistora  $R_{N1}$  (podľa časti d)),  $R_{N2} = 0,0 \text{ } \Omega$  a  $R_{N3} = 1,0 \text{ k}\Omega$ .

Pozn.: Derivácia podielu funkcií  $\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ , kde čiarka znamená deriváciu.

#### 4) Premena plutónia

Jedným z využívaných rádioaktívnych materiálov je plutónium  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , ktoré sa vyrába v reaktore s reťazovou reakciou  $^{235}_{92}\text{U}$ . Palivové tyče obsahujú okrem štípného izotopu aj izotop  $^{238}\text{U}$ , ktorý sa v dôsledku bombardovania neutrónmi postupne mení na plutónium.

a) Na obr. A–3 je časť periodickej sústavy prvkov

6	Lanthanoidy	138,91 57 La 1,10 Lanthan	140,12 58 Ce 1,10 Cer	140,91 59 Pr 1,10 Praseodym	144,24 60 Nd 1,10 Neodymium	~145 61 Pm 1,10 Promethium	150,36 62 Sm 1,10 Samarium	151,96 63 Eu 1,00 Europium	157,25 64 Gd 1,10 Gadolinium	158,93 65 Tb 1,10 Terbium	162,50 66 Dy 1,10 Dysprosium	164,93 67 Ho 1,10 Holmium	167,26 68 Er 1,10 Erbium	168,93 69 Tm 1,10 Thulium	173,04 70 Yb 1,10 Ytterbium	174,04 71 Lu 1,10 Lutetium
7	Aktinoidy	227,03 85 Ac 1,00 Aktinium	232,04 90 Th 1,10 Thorium	231,04 91 Pa 1,10 Protaktinium	238,03 92 U 1,20 Uran	237,05 93 Np 1,20 Neptunium	{244} 94 Pu 1,20 Plutonium	~243 95 Am 1,20 Americium	~247 96 Cm 1,20 Curium	~247 97 Bk 1,20 Berkelium	~251 98 Cf 1,20 Kalfornium	~252 99 Es 1,20 Einsteinium	~257 100 Fm 1,20 Fermium	~258 101 Md 1,20 Mendelevium	~259 102 No 1,20 Nobelium	~260 103 Lr 1,20 Lawrencium

Obr. A–3

Predpokladajte, že jadro  $^{238}\text{U}$  absorbuje jeden neutrón. Uved'te, aký izotop touto absorpciou vznikne. Napíšte rovnicu postupných rádioaktívnych premien tohto izotopu, ktoré vedú k vzniku jadra plutónia. Uved'te, o aké premeny ide a aké medziprodukty pri premenách vznikajú.

Plutónium sa ako štípný materiál používa v jadrových reaktoroch. Iné použitie spočíva vo využití energie uvoľnenej pri prirodzenej premene a predstavuje zdroj tepla napr. v termoelektrických zdrojoch elektrickej energie s veľmi dlhou dobou života (napr. v kozmických sondách).

Uvažujte polčas prirodzenej  $\alpha$ -premeny  $\tau_{1/2} = 24\,110$  r sa uvoľní energia  $E = 5,244$  MeV vo forme kinetickej energie produktov premeny.

b) Napíšte rovnicu  $\alpha$ -premeny plutónia a pomenujte vznikajúci izotop.

c) Určte kinetickú energiu  $E_\alpha$  uvoľnenej  $\alpha$ -častice, ak predpokladáme, že na začiatku bolo jadro plutónia v pokoji.

Čisté plutónium je lesklý kov s vysokou elektrickou vodivosťou. Uvažujte vzorku plutónia veľkosti a tvaru stolnotenisovej loptičky s priemerom  $d = 40$  mm, umiestnenú vo vákuu v strede elektricky vodivej dutej gule (obalu) s teplotou  $T_0 = 273$  K.

*Plocha plutóniovej vzorky je zanedbateľne malá oproti ploche dutiny (obalu).*

d) Určte tepelný výkon  $P$ , ktorý sa vo vzorke uvoľňuje, a ustálenú teplotu  $T$  vzorky, ak uvažujete emisivitu povrchu plutónia  $\varepsilon = 0,15$ .

e) Vzorka sa postupne nabíja únikom malého počtu  $\alpha$ -častíc z povrchu vzorky. Určte výsledné napätie  $U$  medzi vzorkou a obalom s nulovým elektrickým potenciálom.

Pri výpočtoch môžete použiť hodnoty: elementárny náboj  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C, Avogadrova konštanta  $N_A = 6,023 \times 10^{23}$  mol $^{-1}$ , hustota plutónia  $\rho_{\text{Pu}} = 19,82 \times 10^3$  kg·m $^{-3}$ , molárna hmotnosť uránu  $^{239}\text{U}$   $M_{\text{mU}} = 239$  g·mol $^{-1}$ , Stefanova-Boltzmannova konštanta  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$  W·m $^{-2}$ ·K $^{-4}$ .

*Pozn.: Emisivita je pomer výkonu vyžarovaného povrchom daného telesa a rovnako veľkým povrchom dokonale čierneho telesa pri rovnakej teplote telesa. Predpokladajte, že vo vákuu nedochádza ku korónovému výboju, v ktorom by elektróny boli vytrhnuté vonkajším elektrickým poľom z povrchu plutóniovej vzorky.*

#### 64. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie A

Autori návrhov úloh:

Eubomír Konrád (1), Ivo Čáp (2, 3, 4),

Recenzia:

Aba Teleki, Lubomír Mucha

Preklad textu úloh do maďarského jazyka:

Aba Teleki

Redakcia:

Ivo Čáp

Vydal:

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023