
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

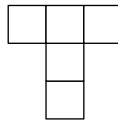
4 Legyen az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ egy olyan pozitív egész számokból álló sorozat, amelyre minden $n \geq 0$ esetén

$$a_{n+2} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_n a_{n+1} - 1.$$

- a) Bizonyítsd be, hogy létezik olyan prímszám, amely a sorozat végtelen sok tagjának osztója.
b) Bizonyítsd be, hogy ilyen prímszámból végtelen sok létezik.

5 Az ABC háromszögben az M, N, P pontok rendre a BC, CA, AB oldalak középpontját jelölik és G a súlypontot. Messe az MP egyenes a BGP háromszög körülírt körét a P -től különböző K pontban, valamint az MN egyenes a CGN háromszög körülírt körét az N -től különböző L pontban. Bizonyítsd be, hogy $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.

6 Legyen n egy olyan pozitív egész szám, amelyre $n \geq 3$. Vegyük azt az $n \times n$ -es négyzethálót, amelynek egyes négyzetei fehér vagy fekete színűek lehetnek. Minden lépésben öt mező színét változtatjuk meg, amelyek egy



alakzatot alkotnak tetszőleges elforgatásban. Kezdetben minden mező fehér. Határozd meg, hogy az n mely értékeire lehet véges sok lépés után elérni azt, hogy az összes négyzet fekete színű legyen.

2. část celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 21. marca 2023 od 8:30 do 13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže
