MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

4 Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť kladných celých čísel taká, že ak $n \geq 0$, tak

$$a_{n+2} = a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_na_{n+1} - 1.$$

a) Dokážte, že niektoré prvočíslo je deliteľom nekonečne veľa členov tejto postupnosti.

b) Dokážte, že takých prvočísel je nekonečne veľa.

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Všimnime si, že ak $n \geq 0$, tak platí

$$a_{n+3} = (a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_na_{n+1}) + a_{n+1}a_{n+2} - 1$$

$$= (a_{n+2} + 1) + a_{n+1}a_{n+2} - 1 = a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+2} = a_{n+2}(a_{n+1} + 1),$$

a teda $a_{n+2} \mid a_{n+3}$. Matematickou indukciou preto ľahko dokážeme, že ak $n \geq m \geq 2$, tak a_n je deliteľné a_m.

a) Keďže všetky členy a_i sú kladné celé čísla, platí

$$a_4 = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 - 1 \geq 1 + 1 + 1 - 1 = 2.$$

Číslo a_4 je teda deliteľné aspoň jedným prvočíslom. Podľa úvodného odseku je každé a_n také, že $n \geq 4$, deliteľné číslom a_4, a teda je deliteľné aj týmto prvočíslom.

b) Tvrdenie dokážeme sporom: Nech je množina všetkých prvočísel, ktoré sú deliteľmi nekonečne mnohých členov postupnosti, konečná. Ako vieme z časti a), je neprázdna. Označme ju P, platí teda $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ pre vhodné kladné k. Zrejme pre každé i z $\{1, 2, \ldots, k\}$ existuje také n_i, že $n_i \geq 2$ a a_{n_i} je deliteľné p_i. Nech $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, potom $N \geq 2$ a podľa úvodného odseku je číslo a_N deliteľné všetkými číslami a_{n_1}, ..., a_{n_k}, a teda i všetkými prvočíslami p_1, ..., p_k. Kladné celé číslo $a_N + 1$, ktoré je väčšie než 1, potom nie je deliteľné žiadnym prvočíslom z P, musí teda existovať prvočíslo q nepatriace do P také, že $q \mid a_N + 1$. Toto prvočíslo q je potom tiež deliteľom čísla $a_{N+1}(a_N + 1)$ čiže a_{N+2}, teda podľa úvodného odseku platí $q \mid a_n$ pre každé n také, že $n \geq N + 2$. Preto $q \in P$, čo je však spor.

Poznámka:

Z riešenia časti a) vieme, že každé prvočíslo, ktoré delí niektorý člen postupnosti počnúc a_2, delí aj všetky nasledujúce členy. Stačí teda dokázať, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré delia aspoň jeden člen danej postupnosti. Tento poznatok je dôsledkom silnejšieho tvrdenia, že *pre každé n je číslo a_{2n+4} deliteľné aspoň n rôznymi prvočíslami*. Dôkaz tohto tvrdenia tu uvádzať nebudeme.

---

5 V trojuholníku ABC označme M, N, P postupne stredy strán BC, CA, AB a G jeho ťažisko. Nech kružnica opísaná trojuholníku BGP pretína priamku MP v bode K rôznom od P a kružnica opísaná trojuholníku CGN pretína priamku MN v bode L rôznom od N. Dokážte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.

(Josef Tkadlec)

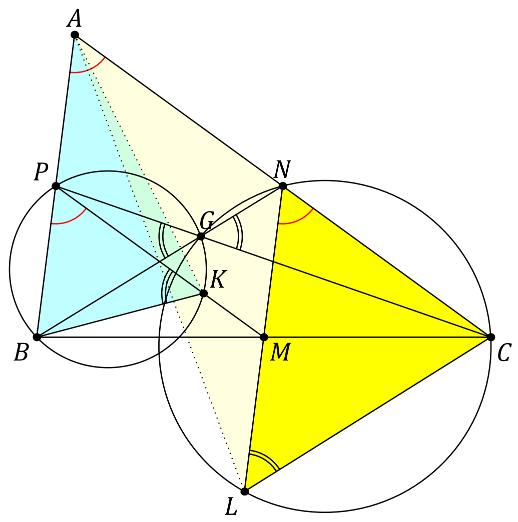
Riešenie:

Stredná priečka MP pretína ťažnicu BN medzi bodmi B a G, takže bod K leží na polpriamke PM a $BKGP$ je tetivový štvoruholník. Podobne bod L leží na polpriamke NM a $CLGN$ je tetivový štvoruholník. Vzhľadom na vzťahy $MP \parallel CA$ a $MN \parallel BA$ tak máme

$$|\sphericalangle BPK| = |\sphericalangle BPM| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle LNC|,$$

zatiaľ čo z oboch tetivových štvoruholníkov vyplýva

$$|\sphericalangle BKP| = |\sphericalangle BGP| = |\sphericalangle NGC| = |\sphericalangle NLC|.$$



Trojuholníky BPK a CNL sú preto podľa vety *uu* podobné. Vďaka tomu sú podobné aj trojuholníky ABK a ACL, a to podľa vety *sus*, lebo

$$|\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle PBK| = |\sphericalangle NCL| = |\sphericalangle ACL|$$

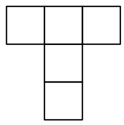
a

$$\frac{|AB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|PB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|NC|}{|CL|} = \frac{|AC|}{|CL|}.$$

Tým je rovnosť $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$ dokázaná.

---

6 Nech n je kladné celé číslo, kde $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria útvar



v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

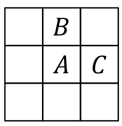
(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Dokážeme, že prefarbenie (t. j. zmena farby štvorčeka z bielej na čiernu a naopak) všetkých n^2 bielych štvorčekov je po určitom počte krokov možné práve vtedy, keď platí $n > 3$ a zároveň je číslo n deliteľné 2 alebo 3.

Ukážme najprv, že ak $n = 3$, tak požadované prefarbenie neexistuje:

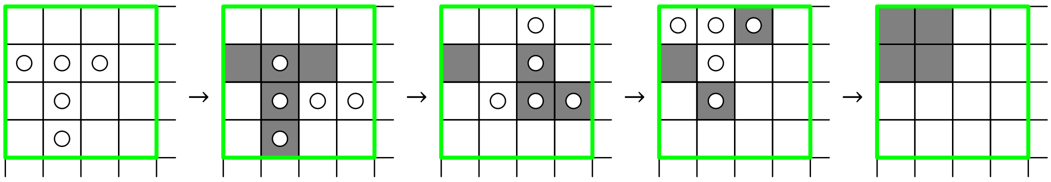
- Uvažujme takéto štvorčeky A, B, C:



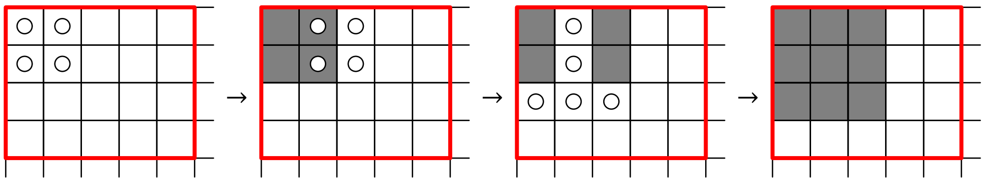
  Uvedomme si, že v každom kroku sa prefarbí štvorček A a práve jeden zo štvorčekov B alebo C. Ak by sme po určitom počte krokov všetkých 9 štvorčekov prefarbili, počty prefarbení štvorčekov B a C by boli nepárne, teda počet prefarbení štvorčeka A by bol párny, a preto by sa vo výsledku štvorček A neprefarbil, čo je spor.

Ďalej už preto budeme predpokladať, že platí $n \geq 4$.

- Ak je n deliteľné 2, využijeme opakovane postup podľa nasledujúceho obrázku, pri ktorom štyrmi krokmi v zeleno vyznačenom štvorci 4×4 prefarbíme práve 4 štvorčeky jedného štvorca 2×2. Papier $n \times n$ rozdelíme na $(n/2)^2$ štvorcov 2×2 a postupne v každom z nich prefarbíme štvorčeky uvedeným postupom. Pri tých štvorcoch, ktoré sú na hranici papiera, budeme konštrukciu z obrázku vhodne otáčať, aby potrebný štvorec 4×4 ležal celý vnútri papiera.



- Ak je n deliteľné 3, využijeme opakovane postup podľa nasledujúceho obrázku, ktorý najskôr využíva dvakrát konštrukciu z predchádzajúceho bodu. Takto v červeno vyznačenom obdĺžniku 5×4 prefarbíme práve 9 štvorčekov jedného štvorca 3×3. Postup podobne ako v 1. časti uplatníme na jednotlivé štvorce 3×3, na ktoré celý papier rozdelíme, pričom pre hraničné štvorce konštrukciu z obrázku opäť vhodne otáčame, aby potrebný obdĺžnik 5×4 ležal celý vnútri papiera.



- Teraz budeme predpokladať, že n nie je deliteľné 2 ani 3. Štvorčeky papiera $n \times n$ v každom riadku označíme postupne číslami 0, 1, 2, 0, …:

0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Nech a_i, kde $i \in \{0, 1, 2\}$, označuje počet čierno zafarbených štvorčekov s číslom i. Všimnime si, že parita každého z troch čísel a_i sa po každom kroku zmení, lebo v ňom meníme farbu niektorých štvorčekov iba v troch susedných stĺpcoch, a to v každom z nich pri nepárnom počte štvorčekov. Keďže na začiatku máme $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, po ľubovoľnom počte krokov budú čísla a_0, a_1, a_2 buď všetky párne, alebo všetky nepárne. Vďaka predpokladu, že 3 nedelí n, je štvorčekov s číslom 0 o n (celý jeden stĺpec) viac ako štvorčekov s číslom 2. Keby po niektorom počte krokov boli všetky štvorčeky zafarbené čierno, platilo by potom $a_0 - a_2 = n$, čo by vzhľadom na predpoklad, že 2 nedelí n, znamenalo, že čísla a_0 a a_2 majú rôznu paritu. To však odporuje záveru z predchádzajúceho odseku. Po žiadnom počte krokov sa nám tak nepodarí zadanú úlohu splniť.