

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

## Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

---

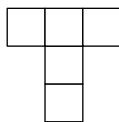
4 Nech  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  je postupnosť kladných celých čísel taká, že ak  $n \geq 0$ , tak

$$a_{n+2} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_n a_{n+1} - 1.$$

- a) Dokážte, že niektoré prvočíslo je deliteľom nekonečne veľa členov tejto postupnosti.  
b) Dokážte, že takých prvočísel je nekonečne veľa.

5 V trojuholníku  $ABC$  označme  $M, N, P$  postupne stredy strán  $BC, CA, AB$  a  $G$  jeho ťažisko. Nech kružnica opísaná trojuholníku  $BGP$  pretína priamku  $MP$  v bode  $K$  rôznom od  $P$  a kružnica opísaná trojuholníku  $CGN$  pretína priamku  $MN$  v bode  $L$  rôznom od  $N$ . Dokážte, že  $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$ .

6 Nech  $n$  je kladné celé číslo, kde  $n \geq 3$ . Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi  $n \times n$ , ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria útvar



v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré  $n$  možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

---

2. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 21. marca 2023** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

---

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže

---