MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1 Pán Škovránok bol známym chovateľom vtákov. Celkovo ich mal viac ako 50 a menej ako 100. Andulky tvorili devätinu a kanáriky štvrtinu celkového množstva vtákov. Koľko vtákov choval pán Škovránok?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Mohol ich chovať napr. 90?

Riešenie:

Počet vtákov, ktoré choval pán Škovránok, musel byť deliteľný 9 (kvôli andulkám) a súčasne 4 (kvôli kanárikom). Také čísla sú 36, 72, 108 atď., teda násobky 36. Z týchto čísel je jedine 72 v uvedenom rozmedzí.

Pán Škovránok choval 72 vtákov.

Poznámka:

Alternatívne môžeme písať, že anduliek bola $\frac{1}{9}$ a kanárikov $\frac{1}{4}$ všetkých vtákov. Anduliek a kanárikov dohromady teda bolo $\frac{1}{9} + \frac{1}{4}$ čiže $\frac{13}{36}$ všetkých vtákov. Tento pomer je možné vyjadriť ako

$$\frac{13}{36} = \frac{26}{72} = \frac{39}{108} = \cdots.$$

Jediná vyhovujúca možnosť je tá druhá.

Poznámka:

Kvôli úplnosti dodajme, že anduliek bolo 8 a kanárikov 18.

---

2 Václav násobil dve trojciferné čísla obvyklým písomným spôsobom. Overil si, že výsledok je naozaj správny a svoj výpočet niekam založil. Po čase potreboval výsledok ukázať mamičke. Našiel síce svoj predchádzajúci výpočet, ale mnoho číslic bolo rozmazaných, takže sa nedali vôbec prečítať (hviezdičky nahrádzajú nečitateľné číslice):

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & 1 & * & * \\
\hline
 & & 2 & 2 & * & * \\
 & & 9 & 0 & * & \\
 & * & * & 2 & & \\
\hline
 & 5 & 6 & * & * & *
\end{array}$$

Václav si už nepamätal, ktoré čísla násobil, napriek tomu bol schopný určiť ich súčin. Aký bol tento súčin?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Pátranie je možné začať rozborom posledného medzivýsledku.

Riešenie:

Kvôli jednoduchšiemu popisu riešenia úlohy označíme v každom kroku číslice, na ktoré sústredíme pozornosť, písmenami a tie budeme postupne dopĺňať.

Číslica 6 vo výslednom čísle určite nezahŕňa prechod cez desiatku (predchádzajúci súčet $2 + 0 + 2$ je dostatočne malý). Teda $b = 5$ (jedine súčet $2 + 9 + 5$ čiže 16 končí číslicou 6) a $a = 4$ (z predchádzajúceho vidíme, že dochádza k prechodu cez desiatku):

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & 1 & * & * \\
\hline
 & & 2 & 2 & * & * \\
 & & 9 & 0 & * & \\
 & a & b & 2 & & \\
\hline
 & 5 & 6 & * & * & *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & 1 & * & * \\
\hline
 & & 2 & 2 & * & * \\
 & & 9 & 0 & * & \\
 & 4 & 5 & 2 & & \\
\hline
 & 5 & 6 & * & * & *
\end{array}$$

Posledný medzivýsledok (452) vzniká súčinom prvého čísla ($\overline{cde}$) s prvou číslicou druhého čísla (čo je 1). Teda prvé číslo bolo 452:

$$\begin{array}{cccccc} & & & c & d & e \\ \times & & & 1 & * & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & * & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & * & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & * & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array}$$

Druhý medzivýsledok ($\overline{90g}$) vzniká súčinom prvého čísla (452) s druhou číslicou druhého čísla (f). Teda $f = 2$ a druhý medzivýsledok bol 904:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & f & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & g & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array}$$

Prvý medzivýsledok ($\overline{22ij}$) vzniká súčinom prvého čísla (452) s treťou číslicou druhého čísla (h). Teda $h = 5$ a prvý medzivýsledok bol 2260:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & h \\ \hline & & 2 & 2 & i & j \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array}$$

Odtiaľ už je možné určiť výsledok:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Václavom hľadaný súčin bol 56500:

Poznámka:

Predposledné dva kroky v uvedenom riešení sú zameniteľné. V takom prípade by (skrátená) rekonštrukcia výsledku vyzerala takto:

$$\begin{array}{cccccc} & & & * & * & * \\ \times & & & 1 & * & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & * & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & * & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ & & 9 & 0 & * & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & * & 5 \\ \hline & & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & & 9 & 0 & * & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & & 9 & 0 & 4 & \\ & 4 & 5 & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Poznámka:

Vzhľadom na to, že na každom mieste môže byť najviac desať možných číslic, dá sa pri riešení úlohy postupovať systematickým preverovaním možností.

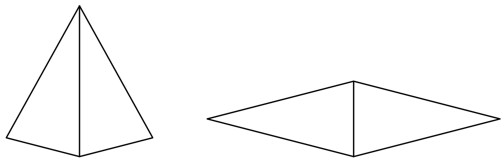
Poznámka:

Súčasťou úlohy je aj popis postupu vedúceho k správnej odpovedi. Vyplnený algebrogram bez primeraného komentára nemožno hodnotiť najlepším stupňom.

---

3 Magda si z papiera vystrihla dva rovnaké rovnoramenné trojuholníky, z ktorých každý mal obvod 100 cm. Najprv z týchto trojuholníkov zložila štvoruholník tak, že ich k sebe priložila ramenami. Potom z nich zložila štvoruholník tak, že ich k sebe priložila základňami.

(Ak by mali základne 1 cm a ramená 2 cm, vzniknuté štvoruholníky by teda vyzerali ako na obrázkoch.)



V prvom prípade jej vyšiel štvoruholník s obvodom o 4 cm kratším ako v druhom prípade. Určte dĺžky strán Magdiných trojuholníkov.

(Eva Semerádová)

Nápad:

Bola dlhšia základňa, alebo rameno trojuholníka? A o koľko?

Riešenie 1:

Obvod prvého štvoruholníka pozostáva z dvoch ramien a dvoch základní, obvod druhého zo štyroch ramien. Pretože prvý štvoruholník mal o 4 cm kratší obvod ako druhý, musela byť základňa o 2 cm kratšia ako rameno.

Obvod každého trojuholníka pozostáva z jednej základne a dvoch ramien, čo zodpovedá trom ramenám bez 2 cm. Súčasne každý trojuholník mal obvod 100 cm. Teda súčet dĺžok troch ramien bol 102 cm.

Ramená trojuholníkov merali 34 cm (lebo 102 cm : 3 = 34 cm) a základňa 32 cm (lebo 34 cm − 2 cm = 32 cm).

Riešenie 2:

Všetky dĺžky budeme uvádzať v centimetroch.

Ak dĺžku základne označíme z a dĺžku ramena r, tak rozdiel obvodov štvoruholníkov je $4r - 2r - 2z$ čiže $2r - 2z$, čo má byť 4, teda $r - z = 2$ alebo $z = r - 2$. Obvod každého trojuholníka je $2r + z = 3r - 2$, čo má byť 100, teda $3r = 102$. Odtiaľ dostávame $r = 102 : 3 = 34$ a $z = 34 - 2 = 32$.

Trojuholníky s takýmito stranami existujú, keďže sú splnené trojuholníkové nerovnosti ($34 + 32 > 34$ a $34 + 34 > 32$).

---

4 Sedem trpaslíkov sa narodilo v rovnaký deň v siedmich po sebe idúcich rokoch. Súčet vekov troch najmladších trpaslíkov je 42 rokov. Keď jeden trpaslík odišiel so Snehulienkou po vodu, zistili zvyšní trpaslíci, že ich priemerný vek je rovnaký ako priemerný vek všetkých siedmich. Koľko rokov mal trpaslík, ktorý šiel so Snehulienkou po vodu?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Koľko rokov mali jednotliví trpaslíci?

Riešenie 1:

Súčet vekov prvých troch trpaslíkov bol 42 rokov, teda priemerne mali 14 rokov (lebo $42 : 3 = 14$). Veky týchto, resp. zvyšných štyroch trpaslíkov boli 13, 14, 15, resp. 16, 17, 18 a 19 rokov.

Súčet vekov všetkých siedmich trpaslíkov bol 112 rokov, teda priemerne mali 16 rokov (lebo $112 : 7 = 16$). Ak by odišiel najmladší trpaslík, priemerný vek zvyšných šiestich by bol 16,5 rokov:

$$(112 - 13) : 6 = 16{,}5.$$

Podobne pre ostatných trpaslíkov určíme, čo by sa po ich odchode stalo s priemerným vekom zvyšných:

vek odchádzajúceho	13	14	15	16	17	18	19
priemer zvyšných	16,5	$16,\overline{3}$	$16{,}1\overline{6}$	16	$15{,}8\overline{3}$	$15{,}\overline{6}$	15,5

Priemerný vek sa nezmenil po odchode prostredného trpaslíka. Trpaslík, ktorý odišiel so Snehulienkou, mal 16 rokov.

Poznámka:

Priemerný vek trpaslíkov sa po odchode jedného z nich nezmenil. Onen trpaslík sa teda narodil ako prostredný a jeho vek bol priemerným vekom všetkých siedmich. Týmto spôsobom je možné nahradiť skúšanie možností v druhej časti riešenia.

Riešenie 2:

Ak vek najmladšieho trpaslíka označíme n, tak súčet vekov prvých troch trpaslíkov bol $n + (n + 1) + (n + 2)$ čiže $3n + 3$, čo má byť 42. Z toho $3n = 39$, t. j. $n = 13$. Veky trpaslíkov boli 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 rokov. Súčet všetkých siedmich vekov bol 112 a ich priemer $112 : 7$ čiže 16. Ak vek odchádzajúceho trpaslíka označíme o, tak sa priemer zvyšných nezmenil: $(112 - o) : 6 = 16$. Z toho $112 - o = 96$, t. j. $o = 16$.

---

5 Pat a Mat si precvičovali počítanie. Vo štvorcovej sieti orientovanej podľa svetových strán priradili posunu o jedno políčko nasledujúce matematické operácie:

- Pri posune na sever (S) pripočítali sedem.
- Pri posune na východ (V) odpočítali štyri.
- Pri posune na juh (J) vydelili dvoma.
- Pri posune na západ (Z) vynásobili tromi.

(Napríklad keď Mat zadal Patovi číslo 5 a cestu S-V-J, vyšlo im pri správnom počítaní číslo 4.)
Ktoré číslo zadal Pat Matovi, ak pri ceste S-V-J-Z-Z-J-V-S pri správnom počítaní vyšlo na konci číslo 57?

(Michaela Petrová)

Nápad:

Ktoré číslo mal Mat v predposlednom kroku?

Riešenie:

Úlohu je možné znázorniť ako tzv. číselného hada:

$$\bigcirc \xrightarrow[+7]{\mathsf{S}} \bigcirc \xrightarrow[-4]{\mathsf{V}} \bigcirc \xrightarrow[:2]{\mathsf{J}} \bigcirc \xrightarrow[\cdot 3]{\mathsf{Z}} \bigcirc \xrightarrow[\cdot 3]{\mathsf{Z}} \bigcirc \xrightarrow[:2]{\mathsf{J}} \bigcirc \xrightarrow[-4]{\mathsf{V}} \bigcirc \xrightarrow[+7]{\mathsf{S}} 57$$

Postupne odzadu doplníme všetky medzivýsledky:

$$21 \xrightarrow[+7]{\mathsf{S}} 28 \xrightarrow[-4]{\mathsf{V}} 24 \xrightarrow[:2]{\mathsf{J}} 12 \xrightarrow[\cdot 3]{\mathsf{Z}} 36 \xrightarrow[\cdot 3]{\mathsf{Z}} 108 \xrightarrow[:2]{\mathsf{J}} 54 \xrightarrow[-4]{\mathsf{V}} 50 \xrightarrow[+7]{\mathsf{S}} 57$$

Pat teda zadal Matovi číslo 21.

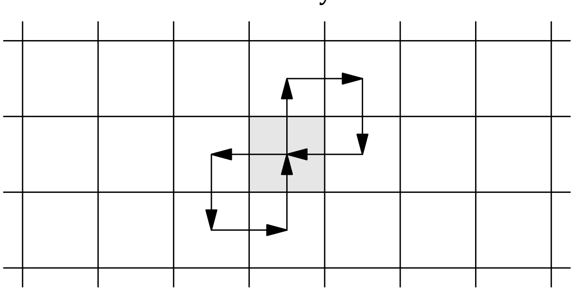
Poznámka:

Pri spätnom postupe operácie v jednotlivých krokoch obraciame (napr. v prvom kroku namiesto $x + 7 = 57$ uvažujeme $x = 57 - 7$). S týmto postrehom je možné predchádzajúce riešenie zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned}
&(((((((((57 - 7) + 4) \cdot 2) : 3) : 3) \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= (((((((50 + 4) \cdot 2) : 3) : 3) \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= ((((((54 \cdot 2) : 3) : 3) \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= (((((108 : 3) : 3) \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= ((((36 : 3) \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= (((12 \cdot 2) + 4) - 7 \\
&= ((24 + 4) - 7 \\
&= 28 - 7 \\
&= 21.
\end{aligned}$$

Poznámka:

Číselný had v štvorcovej sieti čiže Matova skutočná cesta vyzerala takto:



V zvýraznenom poli uprostred sa začínala (číslom 21), prechádzala ním po štvrtom kroku (medzivýsledok 36) a tiež sa v ňom končila (výsledok 57).

6 Boris má zvláštne digitálne hodiny. Idú síce presne, ale namiesto hodín a minút ukazujú iné dve čísla: Prvé je ciferným súčtom čísla, ktoré by bolo na displeji bežných hodín, druhé je súčtom hodín a minút (napríklad o 7:30 ukazujú Borisove hodiny 10:37). Aký môže byť skutočný čas, keď Borisove hodiny ukazujú 6:15? Určte všetky možnosti.

(Monika Dillingerová)

Nápad:

Je možné vopred vylúčiť nejaké číslice z bežného vyjadrenia času?

Riešenie:

Ciferný súčet číslic ukazujúcich skutočný čas je 6, teda žiadna z číslíc nie je väčšia ako 6. Súčet čísel ukazujúcich skutočné hodiny a minúty je 15. Pomocou číslic od 0 do 6 je možné 15 vyjadriť ako súčet dvoch čísel nasledujúcimi spôsobmi: $0 + 15$, $4 + 14$, $2 + 13$, $3 + 12$, $4 + 11$, $5 + 10$.

Keď Borisove hodiny ukazujú 6:15, môže byť 0:15, 1:14, 2:13, 3:12, 4:11, 5:10, 10:05, 11:04, 12:03, 13:02, 14:01 alebo 15:00.

Poznámka:

Súčasťou úlohy je aj popis postupu vedúceho k správnej odpovedi. Uvedené časy bez primeraného komentára nemožno hodnotiť najlepším stupňom.