64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória A

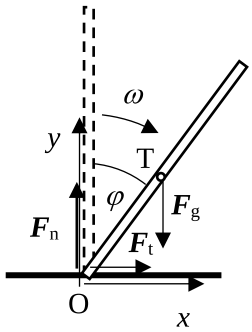
Celoštátne kolo – text teoretických úloh

1) Pád tyče IC

Riešenie:

a) Obr. RA–1, znázornenie síl $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ – tiažovej, $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ vodorovnej a zvislej zložky sily, ktorou pôsobí podložka na tyč.

V obrázku sú označené základné smery x, y a začiatok súradníc v bode dotyku tyče s podložkou.



Obr. RA–1

b) Ak sa dolný koniec tyče neprešmykuje, nedochádza k stratám mechanickej energie. Zákon zachovania mechanickej energie vyjadruje rovnica

$$m\,g\,\frac{l}{2}\left(1-\cos\varphi\right)=\frac{1}{2}J\,\omega^2 .$$

kde $J=\frac{1}{12}m\,l^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}m\,l^2$ je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu bodom O.

Po dosadení a úprave dostávame

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\left(1-\cos\varphi\right)} .$$

Deriváciou podľa času dostaneme uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon=\dot{\omega}=\sqrt{\frac{3g}{l}}\,\frac{\sin\varphi}{2\sqrt{1-\cos\varphi}}\,\dot{\varphi}=\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi .$$

Uhlové zrýchlenie možno určiť aj z pohybovej rovnice otáčavého pohybu

$$J\,\varepsilon=F_\mathrm{g}\,\frac{l}{2}\sin\varphi \text{. odkiaľ }\quad \varepsilon=\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi .$$

Pre dané hodnoty $\omega_0\approx 3{,}63\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\varepsilon_0\approx 24{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

c) Pohybové rovnice vo vodorovnom a zvislom smere majú tvar

$$m\,a_x=F_\mathrm{t} \quad \text{a} \quad m\,a_y=F_\mathrm{n}-F_\mathrm{g}$$

Určíme zrýchlenia ťažiska tyče.

Súradnice ťažiska

$$x=\frac{l}{2}\sin\varphi \quad \text{a} \quad y=\frac{l}{2}\cos\varphi ,$$

zložky rýchlosti pohybu ťažiska (časové derivácie súradníc – derivácie označené bodkou)

$$v_x=\dot{x}=\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}=\frac{l}{2}\omega\cos\varphi$$

$$v_y=\dot{y}=-\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}=-\frac{l}{2}\omega\sin\varphi$$

a zložky zrýchlenia (časové derivácie zložiek rýchlosti)

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{l}{2}\left(\dot{\omega}\cos\varphi - \omega\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right) = \frac{l}{2}\left(\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right)$$

$$a_y = \dot{v}_y = -\frac{l}{2}\left(\dot{\omega}\sin\varphi + \omega\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) = -\frac{l}{2}\left(\varepsilon\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi\right).$$

Sily podložky sú potom

$$F_\mathrm{t} = m\,a_x = \frac{m\,l}{2}\left(\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right) = \frac{3m\,g}{4}\left(3\cos\varphi - 2\right)\sin\varphi\,,$$

$$F_\mathrm{n} = m\,g + m\,a_y = m\,g - \frac{m\,l}{2}\left(\varepsilon\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi\right) = \frac{m\,g}{4}\left(1 - 3\cos\varphi\right)^2.$$

Pre dané hodnoty $F_{\mathrm{t}1} \approx 0{,}44$ N, $F_{\mathrm{n}1} \approx 1{,}25$ N

d) Sila F_t trenie má na začiatku smer pádu a na opačný smer sa mení pre $\cos\varphi_0 = 2/3$, resp. $\varphi_0 \approx 48°$.

Podmienka statického trenia je preto

$$\left|F_\mathrm{t}\right| \le f\,F_\mathrm{n}\,.$$

a po dosadení

$$f \ge \frac{\left|F_\mathrm{t}\right|}{F_\mathrm{n}} = 3\,\frac{\left|3\cos\varphi - 2\right|\sin\varphi}{\left(1 - 3\cos\varphi\right)^2}\,. \qquad (1)$$

Pre uhol $\varphi_1 < \varphi_0$ platí pre medzný uhol prešmyknutie

$$f_1 = 3\,\frac{\left(3\cos\varphi_1 - 2\right)\sin\varphi_1}{\left(1 - 3\cos\varphi_1\right)^2} \approx 0{,}34.$$

Dolný koniec tyče sa prešmykne proti smeru pádu tyče.

Pre $\varphi_2 > \varphi_0$ platí

$$f_2 = 3\,\frac{\left(2 - 3\cos\varphi_2\right)\sin\varphi_2}{\left(1 - 3\cos\varphi_2\right)^2} \approx 0{,}50.$$

Dolný koniec tyče sa prešmykne v smere pádu tyče.

2) Tlak vo vnútri Zeme

Riešenie:

a) Intenzita vo vzdialenosti r od stredu gule s hustotou ρ a polomerom R je

$$E = G\,\frac{m}{r^2} = G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi G\rho}{3}r = G\,\frac{M}{R^3}r\,.$$

(Použiť Gaussovu vetu)

Vo vzdialenosti r_1 od stredu Zeme

$$E_1 = G\,\frac{M}{2R^2} \approx 4{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Pozn.: $E_1 = g/2$.

b) Výsek tenkej vrstvy gule s plochou dS a hrúbkou dr, obr. RA–2, pôsobí na výsek gule pod sebou gravitačným tlakom

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{\mathrm{d}S}\left(\mathrm{d}S\,\mathrm{d}r\right)\rho E = \rho\frac{4\pi G\rho}{3}r\,\mathrm{d}r\,.$$

Výsledný tlak vrstiev nad guľou s polomerom r je

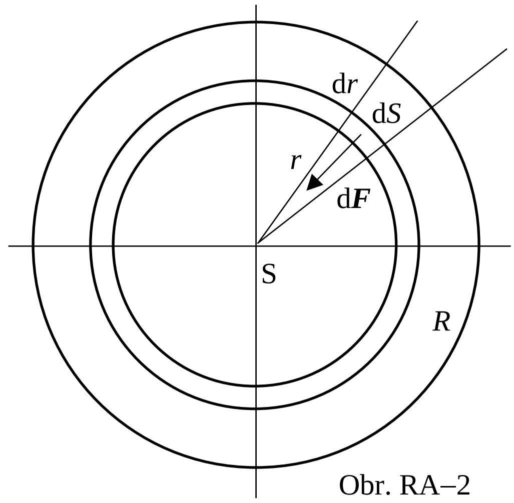
$$p(r) = p_0 + \int_r^R \frac{4\pi G\rho^2}{3}r\,\mathrm{d}r = p_0 + \frac{4\pi G\rho^2}{6}\left(R^2 - r^2\right).$$

Po dosadení za hustotu gule

$$p(r) = p_0 + \int_r^R \frac{4\pi G\rho^2}{3}r\,\mathrm{d}r = p_0 + \frac{3GM^2}{8\pi R^6}\left(R^2 - r^2\right).$$

Pre $r = r_1$ dostávame $p_1 \approx 1{,}3\times10^{11}$ Pa.

Pre $r = 0$ máme $p_S \approx 1{,}7\times10^{11}$ Pa.

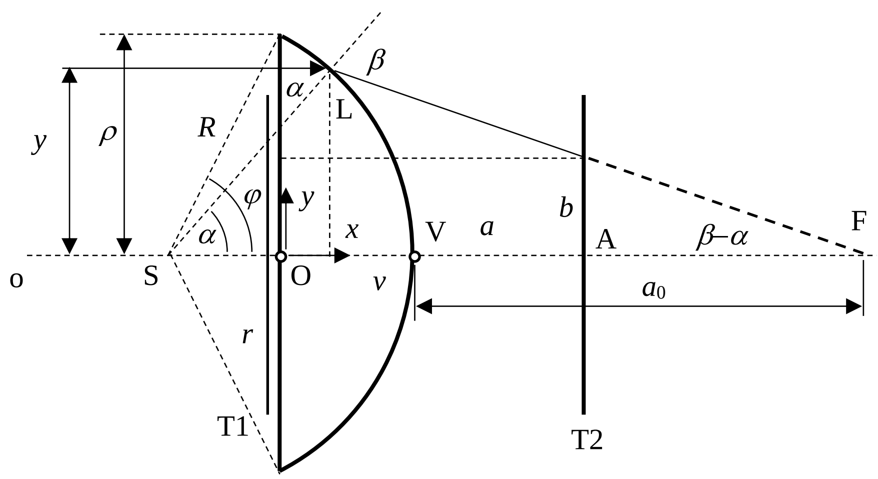


Obr. RA–2

3) Optika

Riešenie:

a) Chod lúča znázorňuje obr. RA–3.



Obr. RA–3

Sledujeme lúč, ktorý dopadá na šošovku vo vzdialenosti y od osi. Lúč postupuje v šošovke rovnobežne s osou a potom sa láme v bode L na povrchu guľovej plochy so súradnicami

$$x = R\cos\alpha - \sqrt{R^2 - \rho^2}\ , \quad y = R\sin\alpha\,, \qquad (1)$$

kde $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$ a $r \le y \le \rho$.

Zákon lomu

$$\sin\beta = n\sin\alpha \quad \text{pre } \alpha \le \alpha_\mathrm{m}\text{, kde } \alpha_\mathrm{m} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ je medzný uhol úplného odrazu.}$$

Lomený lúč pretína os v bode F vo vzdialenosti a_0 od vrcholu V šošovky, pričom platí

$$\frac{y}{a_0 + v - x} = \tan(\beta - \alpha),$$

kde v je výška vrchlíka a $v - x = R(1 - \cos\alpha)$. Po dosadení dostávame

$$\frac{R\sin\alpha}{a_0 + R(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}. \qquad (2)$$

S uvážením zákona lomu

$$\frac{R\sin\alpha}{a_0 + R(1-\cos\alpha)} = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha - \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\,\sin\alpha}{\cos\alpha\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha} + n\sin^2\alpha},$$

a odtiaľ

$$a_0 = \frac{n(1-\cos\alpha) + \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{n\cos\alpha - \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}\,R.$$

Vzdialenosť vyjadríme pomocou danej premennej y

$$a_0 = \frac{n(1-\cos\alpha) + \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{n\cos\alpha - \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}\,R$$

$$a_0 = \frac{nR - \left(n\sqrt{R^2-y^2} - \sqrt{R^2-n^2y^2}\right)}{\left(n\sqrt{R^2-y^2} - \sqrt{R^2-n^2y^2}\right)}\,R. \qquad (3)$$

b) Lúč prechádza zo skla do vzduchu. Pri väčších uhloch dopadu dochádza k úplnému odrazu a lúč za šošovku neprejde. Medzný uhol α_m úplného odrazu je daný vzťahom

$$\sin\alpha_m = \frac{1}{n}.$$

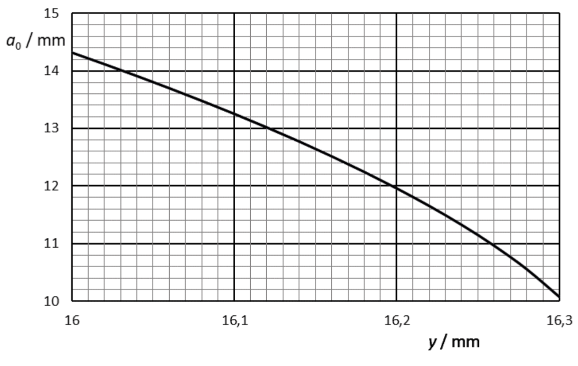
Tomu zodpovedá vzdialenosť dopadajúceho lúča

$$y_m = R\sin\alpha_m = \frac{R}{n} \approx 16{,}3\ \text{mm}.$$

Je preto zrejmé, že šošovkou prejdú iba lúče, dopadajúce vo vzdialenosti $r \le y \le y_m$, tzn. iba na tenké medzikružie $y \in (16{,}0\ \text{mm};\ 16{,}3\ \text{mm})$.

Po dosadení medzných hodnôt do (3) dostávame $a_{0\,\min} \approx 8{,}0$ mm (pre $y = 16{,}3$ mm) a $a_{0\,\max} \approx 14{,}3$ mm (pre $y = 16{,}0$ mm), a teda $d \approx 6{,}3$ mm.

Pozn.: Pre názornosť je uvedený graf a_0 *ako funkcie y pre dané hodnoty.*



c) Je zrejmé, že na tienidle sa zobrazí medzikružie. Polomer kružnice, ktorá zodpovedá danej hodnote y je daná vzťahom

$$b = (a_0 - a)\tan(\beta - \alpha).$$

Postupom naznačeným vo vzťahu (2) vzťah upravíme

$$b = \frac{(a_0 - a)R\sin\alpha}{a_0 + R(1-\cos\alpha)} = \frac{(a_0 - a)y}{a_0 + \left(R - \sqrt{R^2 - y^2}\right)}.$$

Po dosadení hodnôt pre krajné lúče dostávame polomery kružníc ohraničujúcich medzikružie

$b_{min} \approx 3{,}5$ mm a $b_{max} \approx 7{,}4$ mm.

4) Rádioaktivita

Riešenie:

a) Rovnica reakcie

$${}^{112}_{48}\text{Cd} + \text{p} \rightarrow {}^{111}_{49}\text{In} + 2\,\text{n}.$$

Vedľajším produktom reakcie sú dva neutróny.

b) Protón, ktorý vnikne kolmo do homogénneho magnetického poľa sa pohybuje pod účinkom sily magnetického poľa kolmej na smer pohybu. Ide preto o rovnomerný zakrivený pohyb. Pohybová rovnica má tvar

$$m\frac{v^2}{r} = e\,v\,B\text{, odkiaľ dostávame } \frac{v}{r} = \frac{e\,B}{m} = \omega_c, \qquad (1)$$

kde ω_c je cyklotrónová uhlová frekvencia.

Ak má byť protón pri každom prechode urýchľovaný, musí sa za každú polkružnicu pohybu zmeniť polarita napätia. Frekvencia striedavého napätia je rovná frekvencii obehu protónu

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{e\,B}{m} = 4{,}58\text{ MHz}.$$

Z rovnice (1) dostávame polomer trajektórie

$$r = \frac{m\,v}{e\,B}.$$

Výstupnú rýchlosť určíme z energie protónov

$$v_v = \sqrt{\frac{2E_p}{m}} \approx 1{,}39\times10^7\ \text{m·s}^{-1}.$$

Keďže $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 2{,}1\times10^{-3} << 1$, možno považovať nerelativistický výsledok za dostatočne presný.

Polomer obvodu duantov

$$R = \frac{m\,v_v}{e\,B} = \frac{\sqrt{2mE_p}}{e\,B} \approx 48{,}1\text{ cm}.$$

c) Reakcia premeny

$${}^{111}_{49}\text{In} + {}^{0}_{-1}\text{e} = {}^{111}_{48}\text{Cd} + \gamma \quad \left(\text{presnejšie } {}^{111}_{49}\text{In} + {}^{0}_{-1}\text{e} = {}^{111}_{48}\text{Cd} + \nu_e + \gamma\right).$$

Ako produkt K–záchytu vzniká stabilný izotop ^{111}Cd kadmia.

Molárna hmotnosť ^{111}In Cl je $M_{InCl} = (111 + 35{,}5)$ g·mol^{-1}. Počet atómov ^{111}In vo vzorke je

$$N_0 = \frac{m_v}{M_{InCl}}N_A.$$

Aktivita vzorky je

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0 = \frac{\ln 2}{T} \frac{m_\mathrm{v}}{M_\mathrm{InCl}} N_\mathrm{A} \approx 1{,}18 \times 10^{14}\ \mathrm{Bq}.$$

Počet nepremenených jadier

$$N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Počet premenených jadier je rovný počtu vznikajúcich jadier Cd

$$N_\mathrm{Cd}(t_\mathrm{r}) = N_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t_\mathrm{r}}\right) = \frac{m_\mathrm{v} N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{InCl}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t_\mathrm{r}}\right) \approx 4{,}78 \times 10^{18}.$$

Hmotnosť atómov Cd

$$m_\mathrm{Cd} = \frac{N_\mathrm{Cd}}{N_\mathrm{A}} M_\mathrm{Cd} = m_\mathrm{v} \frac{M_\mathrm{Cd}}{M_\mathrm{InCl}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t_\mathrm{r}}\right) \approx 0{,}88\ \mathrm{mg}.$$

64. ročník Fyzikálnej olympiády – Celoštátneho kola kategórie A - teoretické úlohy
Autor úloh: Ivo Čáp
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakčná úprava: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
NIVAM - Národný inštitút vzdelávania a mládeže 2023