

## 64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

### Kategória B

*Domáce kolo – text úloh*

#### 1) Zacyklená kladka

Riešenie:

- a) Polomery  $R$  kladiek sú v rovnakom pomere ako ich obvody  $r$ , preto platí  $R_4 = 3R/2$  a  $R_3 = R/2$ .

Vo všeobecnosti predpokladajme, že po uvoľnení sa bude kladka K34 otáčať v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek), a teda kladka K1 bude stúpať a kladka K2 klesať. Skrátenie voľnej časti vlákna  $\ell_1$  závesu kladky K1 je rovné predĺženiu voľnej časti vlákna  $\ell_2$  závesu kladky K2.

Ak otočíme dvojkladku K34 o uhol  $\varphi$  v kladnom smere, kladka K1 sa posunie o  $x$  nahor a kladka K2 klesne o rovnaké posunutie

$$x = \ell_1 - \ell'_1 = \ell'_2 - \ell_2 = \frac{1}{2}(R_4 \varphi - R_3 \varphi). \quad (1)$$

Kladka K1 sa pritom pootočí o uhol  $\varphi_1$  a platí

$$x = R_4 \varphi - R \varphi_1. \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) dostávame

$$R \varphi_1 = \frac{1}{2}(R_4 + R_3) \varphi \quad (3)$$

a

$$x = \frac{R_4 - R_3}{R_4 + R_3} R \varphi_1 = \frac{R}{2} \varphi_1. \quad (4)$$

Keďže je vzťah  $x$  a  $\varphi_1$  lineárny, rovnaký vzťah platí i pre rýchlosť  $v_1$  a uhlovú rýchlosť  $\omega_1$  otáčania kladky K1 a pre zrýchlenie  $a_1$  a uhlové zrýchlenie  $\alpha_1$  kladky K1, a teda

$$a_1 = \frac{R}{2} \alpha_1. \quad (5a)$$

Zrýchlenie kladky K2 má rovnakú veľkosť (v opačnom smere) a rovnaký tvar

$$a_2 = -\frac{R}{2} \alpha_2. \quad (5b)$$

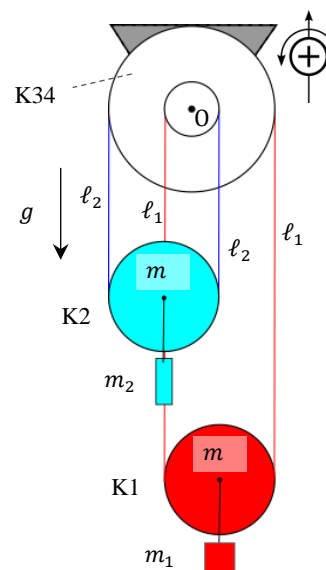
Uhlové zrýchlenia  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  majú rovnaký smer ako zrýchlenie  $\alpha$  dvojkladky K34 a platí

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (6)$$

Uhlové zrýchlenia všetkých kladiek je rovnaké.

Spolu 2 b

- b) Na určenie ťahových síl v pohybujúcej sa sústave, vyjadríme pohybové rovnice jednotlivých telies sústavy, tzn. kladiek K1, K2 a dvojkladky K34. Jednotlivé sily znázorňuje obr. RB–2, kde ťahové sily vlákien predstavujú vektory s označením  $T_i$ .



Obr. RB-1

Hmotnosti  $m$  kladiiek K1 a K2 sú rovnaké, hmotnosť dvojkladky  $m_{34} = \frac{10}{4} m$ . Rovnaké sú momenty

zotrvačnosti kladiiek K1 a K2  $I = \frac{1}{2} m R^2$ ,

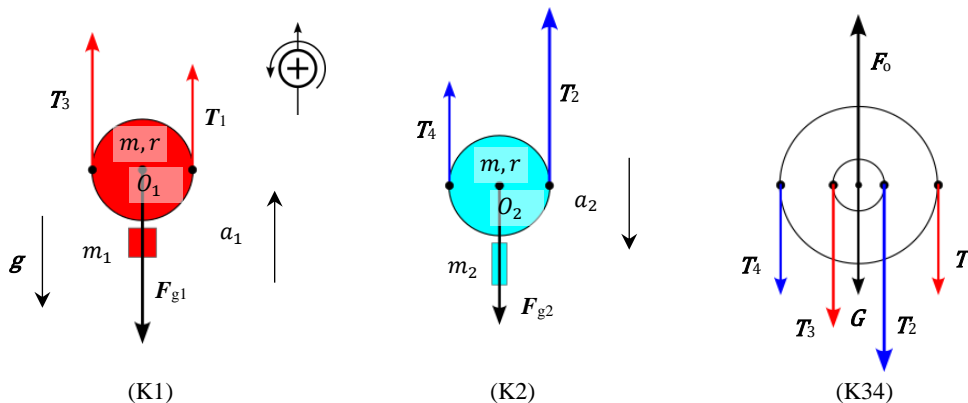
pre dvojkladku máme  $I_{34} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} m \frac{R^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{9}{4} m \frac{9R^2}{4} = \frac{41}{16} m R^2$ .

Pomery na kladke K1 znázorňuje prvý obrázok. Pohybové rovnice postupného a rotačného pohybu opisujú rovnice

$$T_1 + T_3 - (m_1 + m)g = (m_1 + m)a_1 \quad (7)$$

$$T_1 R - T_3 R = I \alpha_1. \quad (8)$$

Pre kladku K2 (druhý obrázok)



Obr. RB-2

$$-T_2 - T_4 + (m_2 + m)g = (m_2 + m)a_2 \quad (9)$$

$$T_2 R - T_4 R = I \alpha_2. \quad (10)$$

Pre kladku K34 dostávame

$$(T_4 - T_1) \frac{3R}{2} + (T_3 - T_2) \frac{R}{2} = I_{34} \alpha \quad (11)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + m_{34}g = F_o. \quad (12)$$

Prítom  $a_1 = -a_2 = a$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , pričom  $a$  a  $\alpha$  súvisia vzťahom (5).

S použitím jednotlivých úprav vyjadříme pohybové rovnice (7) až (11) v tvare

$$T_1 + T_3 = (m_1 + m)(g + a) \quad (13)$$

$$T_1 - T_3 = m a \quad (14)$$

$$T_2 + T_4 = (m_2 + m)(g - a) \quad (15)$$

$$T_2 - T_4 = -m a \quad (16)$$

$$-3T_1 - T_2 + T_3 + 3T_4 = \frac{41}{4} m a \quad (17)$$

$$F_o = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \frac{10}{4} m g. \quad (18)$$

Správne rovnice

2 b

Existuje viacero možností riešiť túto sústavu rovníc.

Jedna z možností spočíva vo vyjadrení  $T_1$  a  $T_3$  sčítaním a odčítaním rovníc (13) a (14), podobne  $T_2$  a  $T_4$  z rovníc (15) a (16). Po dosadení výsledkov do rovnice (17) určíme zrýchlenie  $a$ . Potom dosadíme  $a$  do jednotlivých vzťahov pre ťahové sily. Potom po dosadení do (18) určíme silu  $F_o$ .

$$2T_1 = (m_1 + m)g + (m_1 + 2m)a \quad (19)$$

$$2T_3 = (m_1 + m)g + m_1a \quad (20)$$

$$2T_2 = (m_2 + m)g - m_2a \quad (21)$$

$$2T_4 = (m_2 + m)g - (m_2 + 2m)a \quad (22)$$

Po dosadení do (17) dostávame zrýchlenie

$$a = \frac{4(m_2 - m_1)}{4m_2 + 4m_1 + 65m} g. \quad (23)$$

Po dosadení (23) do (19) až (22) dostávame výslední vzťahy pre ťahové sily

$$T_1 = \frac{8m_1m_2 + (12m_2 + 61m_1)m + 65m^2}{2(4m_2 + 4m_1 + 65m)} g$$

$$T_2 = \frac{8m_1m_2 + (69m_2 + 4m_1)m + 65m^2}{2(4m_2 + 4m_1 + 65m)} g$$

$$T_3 = \frac{8m_1m_2 + (4m_2 + 69m_1)m + 65m^2}{2(4m_2 + 4m_1 + 65m)} g$$

$$T_4 = \frac{8m_1m_2 + (61m_2 + 12m_1)m + 65m^2}{2(4m_2 + 4m_1 + 65m)} g.$$

Pre dané hodnoty  $T_1 \approx 801$  N,  $T_2 \approx 446$  N,  $T_3 \approx 852$  N,  $T_4 \approx 495$  N.

4 b

c) Vzťahy pre ťahové sily dosadíme do (18) a po úprave dostávame

$$F_o = \frac{32m_1m_2 + 166(m_2 + m_1)m + 585m^2}{2(4m_2 + 4m_1 + 65m)} g.$$

Pre  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a dané hodnoty  $F_o \approx 4\,554$  N.

2 b

## 2) Elektrolyt v magnetickom poli

*Riešenie:*

a) V elektrolytu sa vytvorí homogénne elektrické pole s intenzitou  $E$ , pričom platí  $U = E b$ , a teda

$$E = \frac{U}{b} \approx 120 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Prúdovú hustotu určíme z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare

$$J = \gamma E = \gamma \frac{U}{b} \approx 2,0 \text{ kA}\cdot\text{m}^{-2}.$$

- b) Na prúd v elektrolyte pôsobí magnetické pole silou kolmou na smer prúdu a na smer magnetickej indukcie. V našom prípade podľa obr. B-2 pôsobí táto sila vo vodorovnom smere kolmo k zadnej strane nádoby. Na zadnej strane sa hladina zdvihne, na prednej poklesne

Situáciu znázorňuje obr. RB-3 (pohľad proti smeru prúdu od elektródy G).

Na elektrolyt pôsobia sily:

- tiažová sila  $F_g$  v ťažisku elektrolytu
- magnetická sila  $F_m$  v ťažisku elektrolytu
- tlaková sila na hladinu  $F_a$
- tlakové sily  $F_1$  až  $F_3$  stien nádoby
- tlakové sily  $F_4$  a  $F_5$  elektród (nezobrazené)

Sila elektrostatického poľa na nábojovo neutrálny elektrolyt je nulová.

Sila magnetickeho poľa  $F_m = B I b$  pôsobí kolmo

k zadnej stene a je rovnomerne rozložená v celom objeme elektrolytu. Intenzita tejto sily, v obr. RB-3 označená  $a_m$ , je

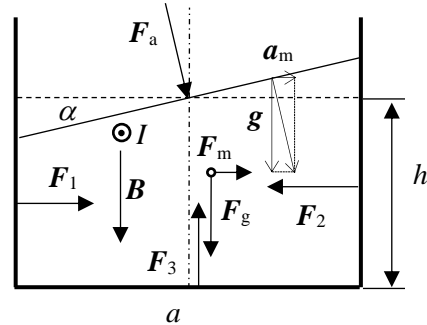
$$a_m = \frac{F_m}{m} = \frac{B I b}{\rho a b h} = \frac{B (J a h) b}{\rho a b h} = \frac{\gamma}{\rho b} B U .$$

Toto silové pole  $a_m$  sa vektorovo skladá s homogénnym poľom tiažovým  $g$ . Hladina kvapaliny je kolmá na výsledné silové pole, obr. RB-3.

- c) Hladina sa vychýli od vodorovného smeru o uhol  $\alpha$  daný vzťahom

$$\alpha = \arctan \frac{a_m}{g} = \arctan \left( \frac{\gamma}{\rho g b} B U \right) .$$

Pre dané hodnoty  $\alpha \approx 3,3^\circ$ .



Obr. RB-3

### 3) Harmonické kmity

Riešenie:

- a) Na začiatku je tyč držaná pružinou vo vodorovnej polohe, pričom teleso na stole je vplyvom trenia v pokoji. Vlákno je napnuté silou  $F_{v0}$ , ktorá udržuje tyč vo vodorovnej polohe, pričom platí rovnica momentovej rovnováhy

$$m_2 g \frac{L}{2} = F_{v0} \frac{L}{3}, \text{ odkiaľ } F_{v0} = m_2 g \frac{3}{2},$$

čo zodpovedá predĺženiu z nedeformovaného stavu  $x_0 = \frac{F_{v0}}{k} = \frac{3}{2} \frac{m_2 g}{k}$ .

Po zatlačení na koniec tyče sa tyč vychýli z vodorovnej polohy o uhol  $\varphi_0$ , pričom dolný koniec pružiny sa posunie o  $\Delta x = \frac{L}{3} \varphi_0$ . (Pozn.: Pre malý uhol  $\varphi$  nahradíme  $\tan \varphi \approx \varphi$ ).

Keďže  $\Delta x$  je predĺženie pružiny sila ťahu pružiny sa zväčší o  $\Delta F_v = k \Delta x$ . Výsledná sila ťahu vlákna je rovná medznej hodnote sily statického trenia

$$F_{v0} + \Delta F_v = m_2 g \frac{3}{2} + k \frac{L}{3} \varphi_0 = f m_1 g .$$

Odtiaľ máme

$$k = \frac{3}{2} \frac{2f m_1 - 3m_2}{L \varphi_0} g. \quad (1)$$

- b) Teliesko nadobudne pádom z výšky  $h$  pred nárazom rýchlosť (zákon zachovania mechanickej energie)

$$v_d = \sqrt{2gh}.$$

Pri náraze sa teliesko „prilepí“ na tyč v mieste dopadu. Sústava tyč-teliesko nárazom nadobudne uhlovú rýchlosť  $\omega_0$  okolo osi O. Pri zrážke sa zachováva moment hybnosti vzhľadom na os O

$$m_3 v_d \frac{2L}{3} = I \omega_0 + m_3 \left( \frac{2L}{3} \right)^2 \omega_0, \text{ kde } I = \frac{1}{3} m_2 L^2 \text{ je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na}$$

os O. Odtiaľ dostávame

$$\omega_0 = \frac{6 m_3}{(3m_2 + 4m_3)L} \sqrt{2gh}.$$

Sústava tyč-teliesko nadobudne kinetickú energiu

$$E_k = \frac{1}{2} (I + I_3) \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} m_2 L^2 + m_3 \left( \frac{2L}{3} \right)^2 \right] \left[ \frac{6 m_3}{(3m_2 + 4m_3)L} \sqrt{2gh} \right]^2,$$

a po úprave

$$E_k = \frac{4 m_3^2}{3m_2 + 4m_3} g h. \quad (2)$$

Pri otočení tyče o uhol  $\varphi$  do najnižšej polohy dochádza k zmene tiažovej potenciálnej energie a deformačnej potenciálnej energie pružiny

$$\Delta E_p = -m_2 g \frac{L}{2} \varphi - m_3 g \frac{2L}{3} \varphi + \frac{1}{2} k \left( x_0 + \frac{L}{3} \varphi \right)^2 - \frac{1}{2} k x_0^2. \quad (3)$$

Pre  $\varphi = \varphi_0$  a po dosadení za  $x_0$  a  $k$  dostaneme po úprave

$$\Delta E_{p1} = \frac{2f m_1 - 3m_2 - 8m_3}{12} L g \varphi_0.$$

V krajnej (najnižšej) polohe tyče je  $E_{kraj} = 0$ , tzn. pre  $h = h_1$  vo vzťahu (2) máme  $E_{k1} = \Delta E_{p1}$ .

Po dosadení a úprave dostávame

$$h_1 = \frac{(2f m_1 - 3m_2 - 8m_3)(3m_2 + 4m_3)}{48 m_3^2} L \varphi_0.$$

- c) Pre  $h_2 < h_1$  zostáva teleso na stole v pokoji, a teda horný koniec pružiny sa nepohybuje.

Z (2) pre  $h = h_2$ , z (3) pre  $\varphi = \varphi_2$  maximálneho vychýlenia a  $E_{k2} = \Delta E_{p2}$  dostaneme pre uhol  $\varphi_2$  kvadratickú rovnicu

$$\varphi_2^2 - 2 \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0 \varphi_2 - \frac{48 m_3^2}{(3m_2 + 4m_3)(2f m_1 - 3m_2)} \frac{h_2}{L} \varphi_0 = 0.$$

Rovnica má dve riešenia zodpovedajúce dvom krajným polohám kmitov

$$\varphi_2 = \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0 \pm \sqrt{\left( \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0 \right)^2 + \frac{48 m_3^2}{(3m_2 + 4m_3)(2f m_1 - 3m_2)} \frac{h_2}{L} \varphi_0},$$

alebo po úprave

$$\varphi_2 = \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0 \pm \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0 \sqrt{1 + 3 \frac{2f m_1 - 3m_2}{3m_2 + 4m_3} \frac{h_2}{L \varphi_0}} = \varphi_{20} \pm \varphi_m.$$

Tyč s telieskom bude kmitať okolo strednej polohy s uhlom vychýlenia

$$\varphi_{20} = \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \varphi_0$$

a s amplitúdou

$$\varphi_m = \frac{4m_3}{2f m_1 - 3m_2} \sqrt{1 + 3 \frac{2f m_1 - 3m_2}{3m_2 + 4m_3} \frac{h_2}{L \varphi_0}} \varphi_0.$$

Po vychýlení tyče z rovnovážnej polohy (s uhlom  $\varphi_{20}$ ) o malý uhol  $\Delta\varphi$  sa moment tiažovej sily nezmení, ale predĺžená pružina pôsobí na sústavu vratným momentom

$$M = \left( -k \frac{L}{3} \Delta\varphi \right) \frac{L}{3} = -\frac{2f m_1 - 3m_2}{6 \varphi_0} L g \Delta\varphi.$$

Pohybová rovnica otáčavého pohybu okolo osi O je

$I \alpha = M$ , kde moment zotrvačnosti tyče s telieskom vzhľadom na os otáčania O

$$I = \frac{1}{3} m_2 L^2 + m_3 \left( \frac{2}{3} L \right)^2.$$

Po dosadení a úprave dostávame

$$\alpha = -\frac{3}{2} \frac{2f m_1 - 3m_2}{3m_2 + 4m_3} \frac{g}{L \varphi_0} \Delta\varphi = -\Omega^2 \Delta\varphi.$$

Ide o rovnicu harmonických kmitov tyče s telieskom s uhlovou frekvenciou  $\Omega$ .

Frekvencia kmitov

$$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2f m_1 - 3m_2}{3m_2 + 4m_3} \frac{g}{L \varphi_0}}.$$

#### 4) Odraz svetla

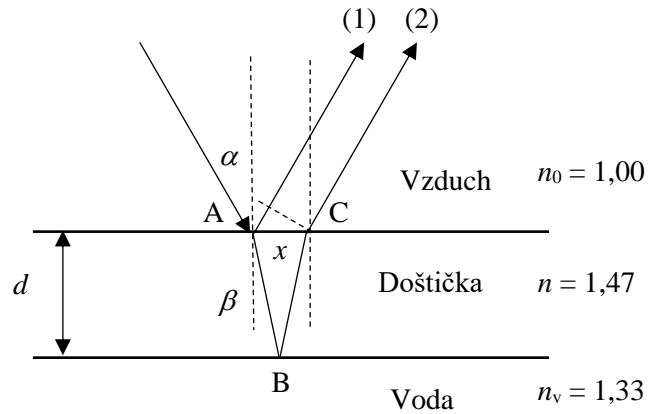
*Riešenie:*

Vrstvička má hrúbku

$$d = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{6} \pi D^3 \right) \approx 1,05 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

- a) Pri odraze dochádza k interferencii svetla odrazeného od povrchu vrstvy a od rozhrania vrstvy a vody. Na rozhraní sa lúč delí na odrazený a lomený prechádzajúci. Prechádzajúci lúč sa odráža od spodného rozhrania a odrazený lúč potom prechádza naspäť do vzduchu nad doštičkou a interferuje s lúčom priamo odrazeným, obr. RB-4.

Pri odraze svetla od opticky hustejšieho prostredia (horný povrch vrstvy) dochádza k zmene fázy vlnenia o  $\pi$  rad, pri odraze od opticky redšieho prostredia (dolný povrch vrstvy), ako aj pri prechode rozhraním k zmene fázy nedochádza. Porovnáme fázy oboch lúčov na vlnoploche prechádzajúcej bodom C výstupu lúča (2) z vrstvy na hornom rozhraní.



Obr. RB-4

Druhý lúč sa láme pod uhlom lomu  $\beta$ , pre ktorý platí

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha ,$$

a vo vrstve prejde dráhu ABC dĺžky

$$l_2 = 2 \frac{d}{\cos \beta} \text{ rýchlosťou } c = \frac{c_0}{n} \text{ a s vlnovou dĺžkou } \lambda = \frac{c}{f} .$$

Vlnové číslo je  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = n k_0$ , kde  $k_0$  je vlnové číslo vo vzduchu.

Na dráhe  $l_2$  je fázové posunutie

$$\varphi_2 = k l_2 = \left( n \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) 2 \frac{d}{\cos \beta} .$$

Lúč (1) od bodu odrazu A prejde dráhu

$$l_1 = x \sin \alpha , \text{ kde } x = 2 d \tan \beta .$$

Fázové posunutie, vrátane zmeny fázy o  $\pi$  rad na rozhraní

$$\varphi_1 = \pi + k_0 l_1 = \pi + \frac{2\pi}{\lambda_0} 2 d \tan \beta \sin \alpha .$$

Fázový rozdiel lúčov na spoločnej vlnoploche

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left( n \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) 2 \frac{d}{\cos \beta} - \frac{2\pi}{\lambda_0} 2 d \tan \beta \sin \alpha - \pi .$$

Po dosadení a úprave

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( 2d \frac{n^2 - \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) - \pi .$$

Podmienka interferenčného maxima (zosilnenia svetla)

$$\Delta \varphi_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \right) - \pi = 2N\pi , \text{ kde } (N = 0, 1, 2, \dots) - \text{párne násobky } \pi .$$

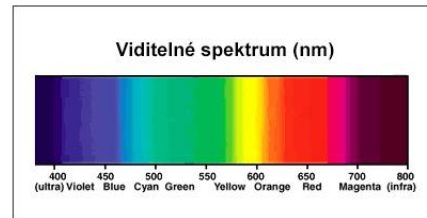
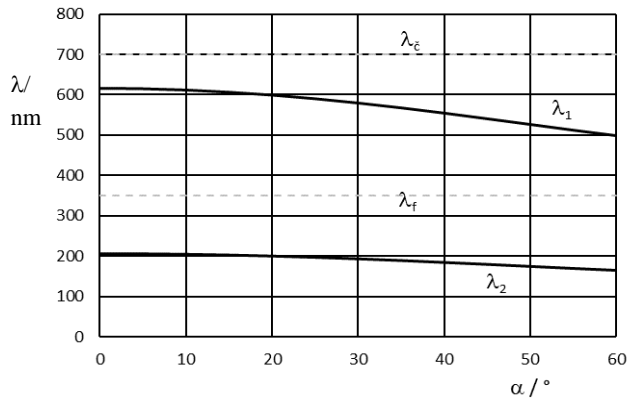
Odtiaľ dostávame vlnovú dĺžku odrazeného svetla (vo vzduchu) s maximálnou intenzitou

$$\lambda_{0\max} = \frac{4d}{2N+1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Pre najväčšiu a druhú najväčšiu vlnovú dĺžku máme

$$\lambda_1 = 4d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{4d}{3} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

- b) Grafy závislosti vlnových dĺžok  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  od uhlu dopadu  $\alpha$ .



Obr. RB-5

- c) Z grafu vidíme, že do spektra viditeľného svetla spadá iba prvé maximum. Druhé maximum sa nachádza v spektre ultrafialového žiarenia. Z grafu vidno, že pri kolmom dopade svetla na hladinu je odrazené svetlo červené, pri zväčšovaní uhlu dopadu sa farba odrazeného svetla postupne mení cez až po modrozelenú.

## 5) Uvoľnená zátka

Riešenie:

- a) Účinkom tiažovej sily sa začne kvapalina s piestikom pohybovať, pričom pri poklese výšky kvapaliny v zvislej časti rúrky sa tiažová sila znižuje. Ak označíme  $x$  posunutie piestika v rúrke, má pohybová rovnica tvar

$(M + m)a = S(L - x)\rho g$ , kde  $M = SL\rho$  je hmotnosť kvapaliny,  $m$  hmotnosť piestika,  $S$  obsah prierezu rúrky,  $\rho$  hustota kvapaliny a  $g$  tiažové zrýchlenie. Pre  $m \ll M$  rovnicu upravíme na tvar

$$a = -\frac{g}{L}(x - L),$$

kde  $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  je zrýchlenie kvapaliny s piestikom a zodpovedá druhej derivácii posunutia  $x$ .

Pohybovú rovnicu napíšeme v tvare

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}(x - L). \quad (1)$$

Rovnica (1) obsahuje deriváciu, ide teda o diferenciálnu rovnicu. Hľadáme funkciu  $x(t)$ , ktorá tejto rovnici vyhovuje.

Pozn.: rovnaká rovnica opisuje pohyb telesa na pružine.



Hľadáme funkciu  $x - L$ , pre ktorú platí, že jej druhá derivácia je rovnaká funkcia, ktorá sa líši znamienkom a násobiacou konštantou. Túto vlastnosť má reálna funkcia

$$x - L = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

tzn. *harmonická funkcia* (funkcia opisujúca harmonické kmity), kde  $A$  je jej amplitúda a  $\alpha$  fázová konštanta.

O tom, či je navrhnutá funkcia riešením rovnice (1) sa presvedčíme dosadením funkcie do rovnice.

Druhá derivácia funkcie (2)

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha).$$

Po dosadení do (1) dostávame

$$-\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\frac{g}{L} A \sin(\omega t + \alpha).$$

Rovnica je splnená, ak  $A \neq 0$  a  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ .

Riešením diferenciálnej rovnice (1) je tak funkcia posunutia

$$x(t) = L + A \sin(\omega t + \alpha). \quad (3)$$

Rýchlosť pohybu piestika

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \alpha). \quad (4)$$

Na začiatku ( $t = 0$ ) je posunutie  $x = 0$  a rýchlosť  $v = 0$ . Ak tieto začiatočné podmienky dosadíme do predchádzajúcich vzťahov, dostávame

$$A \sin \alpha + L = 0 \quad \text{a} \quad \omega A \cos \alpha = 0, \text{ odkiaľ dostávame } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad A = -L.$$

Keďže  $\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega_0 t$ , funkcie posunutia a rýchlosti upravíme na tvar

$$x = L \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t\right), \quad (5)$$

$$v = \sqrt{gL} \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t. \quad (6)$$

b) Tieto funkcie platia pre  $x \leq L$ , kým klesá hladina kvapaliny v zvislej časti rúrky.

Posunutie  $x = L$  dosiahne piestik za čas  $t_1$ , daný vzťahom

$$L \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t_1\right) = L,$$

odkiaľ máme  $t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 0,22 \text{ s}$ . (6)

V čase  $t_1$  dosahuje piestik podľa (6) maximálnu rýchlosť  $v_1 = \sqrt{gL}$ . (7)

Pre  $t > t_1$  sa piestik pohybuje rovnomerným pohybom s rýchlosťou  $v_1$ .

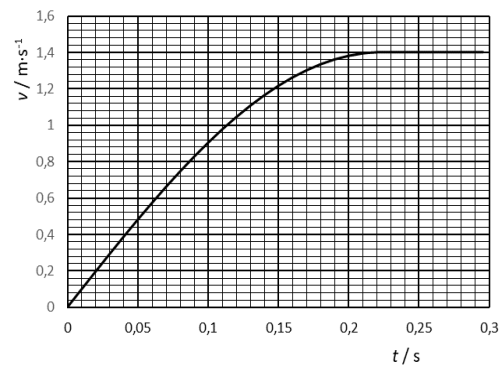
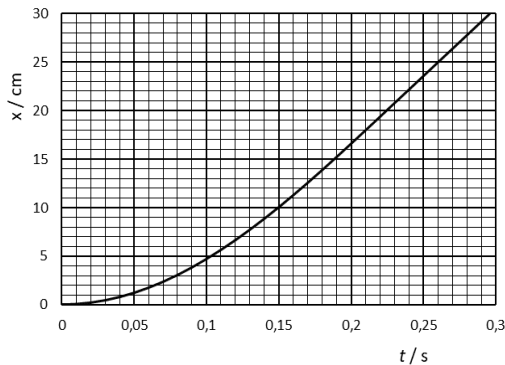
Posunutie piestika je potom

$x = L + v_1 (t - t_1)$  pre  $L < x \leq 3L/2$ , a teda  $t_1 < t \leq t_2$ , kde

$$t_2 = t_1 + \frac{L}{2v_1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} + \frac{L}{2\sqrt{gL}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} (\pi + 1). \quad (8)$$

Pre dané hodnoty  $v_2 = v_1 \approx 1,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $t_2 \approx 0,30 \text{ s}$ .

c) Grafy funkcií posunutia a rýchlosti piestika.



d) Keďže medzi kvapalinou a stenou rúrky pôsobí príťažlivá sila (adhézia), kvapalina pri stene rúrky sa takmer nepohybuje, zatiaľ čo kvapalina v osi rúrky sa pohybuje najväčšou rýchlosťou. Medzi vrstvami kvapaliny od steny rúrky až po jej stred pôsobí sila vnútorného trenia, ktorá vytvára výslednú odporovú silu. Tá spôsobí, že časť pôvodnej potenciálnej energie kvapaliny sa mení na vnútornú energiu kvapaliny a je teda príčinou straty mechanickej energie.

## 6) RL filter

Riešenie:

a) Impedancia sériového RL dvojpólu

$$\mathbf{Z}_1 = R + j\omega L$$

a paralelného RL dvojpólu

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{R(j\omega L)}{R + j\omega L} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L},$$

kde  $j = \sqrt{-1}$  je imaginárna jednotka.

Filter je delič napätia, pre ktorý platí (podobne ako pre odporový delič)

$$\mathbf{U}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{U}_1.$$

Po dosadení a úprave máme

$$\mathbf{A}_U = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\frac{j\omega RL}{R + j\omega L}}{R + j\omega L + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}} = \frac{j\omega RL}{(R + j\omega L)^2 + j\omega RL}.$$

Ak vyjadríme druhú mocninu v menovateli

$$(R + j\omega L)^2 = (R + j\omega L)(R + j\omega L) = R^2 - (\omega L)^2 + j2\omega LR,$$

Komplexnú prenosovú funkciu vyjadríme v tvare

$$\mathbf{A}_U = \frac{j\omega RL}{R^2 - (\omega L)^2 + j3\omega RL}.$$

Amplitúdová napäťová prenosová charakteristika je absolútna hodnota komplexnej charakteristiky

$$A_U = \frac{\omega RL}{\sqrt{[R^2 - (\omega L)^2]^2 + (3\omega RL)^2}} = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^4 + 7(\omega RL)^2 + (\omega L)^4}}.$$

Po zavedení pomeru  $p$  dostávame

$$A_U = \frac{\omega p}{\sqrt{1+7(\omega p)^2+(\omega p)^4}} \quad (1)$$

Fázová prenosová charakteristika

$$\varphi_U = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{3\omega RL}{R^2 - (\omega L)^2} \right] = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{3\omega p}{1 - (\omega p)^2} \right]. \quad (2)$$

b) Pre  $A_{U\text{dB}} = 20 \log A_U = -30$  máme

$$\log A_U = -1,5, \text{ a teda } A_U = 10^{-1,5} = k \approx 3,16 \times 10^{-2} \ll 1.$$

Po dosadení do (1)

$$(\omega p)^4 - \frac{1-7k^2}{k^2} (\omega p)^2 + 1 = 0.$$

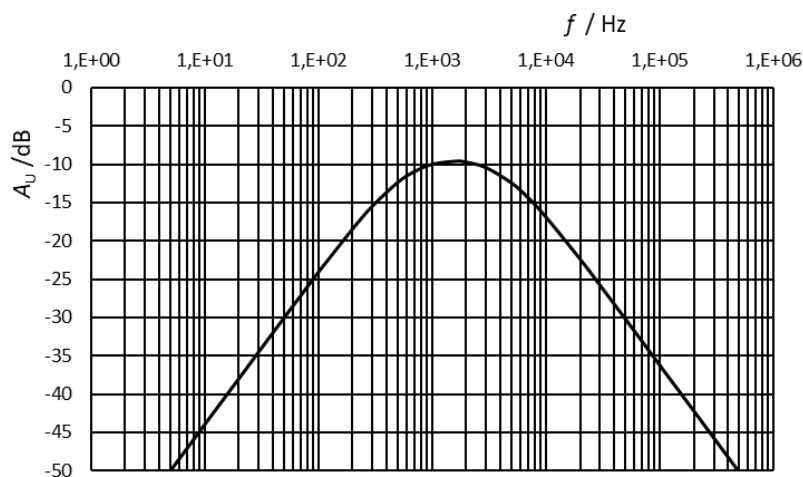
Riešenie tejto kvadratickej rovnice

$$(\omega p)^2 = \frac{1-7k^2}{2k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-7k^2}{2k^2}\right)^2 - 1}.$$

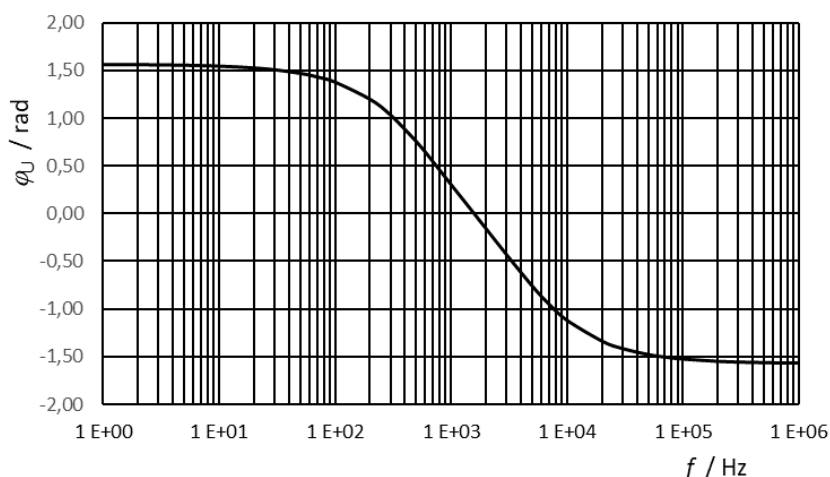
Zo schémy obvodu je zrejmé, že  $\omega \rightarrow 0$  je prenos  $A_U \rightarrow 0$ , tzn.  $k \rightarrow 0$ . Túto podmienku spĺňa iba znamienko (-) v riešení rovnice, preto

$$p_1 = \frac{1}{2\pi f_1} \sqrt{\frac{1-7k^2}{2k^2} - \sqrt{\left(\frac{1-7k^2}{2k^2}\right)^2 - 1}} \approx 1,01 \times 10^{-4}.$$

c) Graf napät'ového prenosu  $A_U$ .



Graf fázovej prenosovej charakteristiky  $\Delta\varphi$



Z prvého grafu vidíme, že pri frekvencii  $f_1 = 50$  Hz je napät'ový prenos  $A_{U \text{ dB}} = -30$  dB. Z grafu vidíme, že maximálny prenos je  $A_{U \text{ dB max}} \approx -9,5$  dB pri frekvencii  $f_m \approx 1,6$  kHz. Fázový prenos pri tejto frekvencii je  $\Delta\varphi_m = 0$  rad (výstupné napätie má rovnakú fázu ako vstupné napätie).

*Pozn.: Kontrola výpočtom*

Ak zavedieme premennú  $x = \omega p$ , vyjadríme napät'ový prenos

$$A_U(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 7x^2 + x^4}}.$$

Maximum tejto funkcie je i maximum je kvadrátu. Extrém funkcie určuje nulová prvá derivácia

$$\frac{dA_U^2(x)}{dx} = \frac{2x(1 + 7x^2 + x^4) - x^2(14x + 4x^3)}{(1 + 7x^2 + x^4)^2} = 0,$$

odkiaľ dostávame  $x = 1$  (riešenie je aj  $x = 0$ , ale to je minimum), tzn.  $\omega = \frac{1}{p}$ .

Pre  $p_1$  dostávame  $f_m = \frac{1}{2\pi p_1} \approx 1,58$  kHz.

Pre  $x = 1$  je  $A_{U \text{ dB}} = 20 \log A_U = -9,54$  dB.

Výsledky určené výpočtom zodpovedajú výsledkom určeným z grafu (v rámci presnosti odčítania z grafu).

## 7) Fotometria

*Riešenie:*

Meranie podľa zadania a navrhovanej metodiky.

---

### 64. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie B

Autori návrhov úloh:	Eubomír Konrád (2, 3, 5), Aba Teleki (1), Ivo Čáp (4, 6, 7)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022