64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória C

Domáce kolo – riešenie úloh

1) Šťastná cesta

Riešenie

a) Keď vstúpi valček na prvú plošinu, začne spolu s plošinou klesať. Keď dosiahne koniec plošiny, musia byť obidve plošiny v rovnakej výške, aby mohol valček hladko prejsť. Po prechode na druhú plošinu bude zvislý pohyb sústavy spomaľovať, až druhá plošina dosiahne výšku stola a valček hladko prejde na stôl. Keďže podmienky pri zrýchľovaní pohybu sústavy a pri spomaľovaní sú rovnaké (rovnaké zrýchlenie), v časti a) stačí riešiť prvú časť pohybu.

Keď vstúpi valček na plošinu, začne sa sústava pohybovať zvislo dole so zrýchlením, pričom platia pohybové rovnice postupného pohybu plošiny a rotačného pohybu kladky

$$(M+m)(g-a)R - M(g+a)R = I\,\alpha \text{ , kde uhlové zrýchlenie kladky } \alpha = \frac{a}{R}.$$

Odtiaľ získame zrýchlenie plošín

$$a = \frac{mR^2}{(2M+m)R^2 + I}\, g \,.$$

Dráhu $h/2$ do vyrovnania plošín prejde za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{h}{g}\frac{(2M+m)R^2+I}{mR^2}}\,.$$

Za tento čas prejde valček šírku d plošiny rýchlosťou v, tzn. $d = v\,t_1$. Odtiaľ máme

$$v = d\sqrt{\frac{g}{h}\frac{mR^2}{(2M+m)R^2+I}} \approx 0{,}63\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

b) V osi kladky pôsobí výsledná sila, ktorá je súčtom tiažovej sily kladky a ťahovým silám vlákna na oboch stranách

$$F_{\mathrm{O}} = M_{\mathrm{k}}\, g + M(g+a) + (M+m)(g-a)\text{, kde } I = \frac{1}{2}M_{\mathrm{k}}\, R^2.$$

Po dosadení

$$F_{\mathrm{O}} = \left[\frac{2I}{mR^2} + \frac{2M}{m} + 1 - \frac{mR^2}{(2M+m)R^2+I}\right] m\,g \approx 46{,}6\ \mathrm{N}.$$

c) Od okamihu vstupu na plošinu začne valček klesať so zrýchlením a a vo vodorovnom smere sa pohybuje rovnomerným pohybom. Ide teda o pohyb po parabole, podobne ako vodorovný vrh.

Podmienka toho, aby valček nezavadil pri klesaní o hranu stolu, je polomer krivosti ρ trajektórie stredu valčeka väčší ako polomer r valčeka. Pri prechode na plošinu je zrýchlenie a kolmé na smer pohybu (dostredivé), tzn.

$$a = \frac{v^2}{\rho}\text{ , odkiaľ máme } \rho = \frac{v^2}{a} > r\text{ . Teda po dosadení a úprave}$$

$$r < \frac{d^2}{h} \approx 0{,}16 \text{ m.}$$

V prípade konkrétneho zadania r = 10 cm je podmienka splnená.

Iný postup zdôvodnenia:

Uvažujme začiatok súradníc O na hrane stola. Súradnice stredu valčeka

$$x = v\,t \quad \text{a} \quad y = r - \frac{1}{2} a\,t^2 .$$

Vzdialenosť stredu valčeka od bodu O musí byť väčšia ako jeho polomer r

$$x^2 + y^2 = v^2 t^2 + \left(r - \frac{1}{2} a\,t^2 \right)^2 > r^2 \quad \text{pre } t > 0.$$

Po dosadení

$$\left(v^2 - r\,a \right) + \frac{1}{4} a^2 t^2 > 0 .$$

Podmienka je kritická najmä pri prechode valčeka na plošinu, tzn. $t \to 0$. Musí teda platiť $v^2 > r\,a$.

Po dosadení za v a a

$$r < \frac{v^2}{a} = \frac{d^2}{h} \approx 0{,}16 \text{ m.}$$

2) Doska vo vode

Riešenie:

a) Obr. RC–1

Na tyč so závažím pôsobia sily:

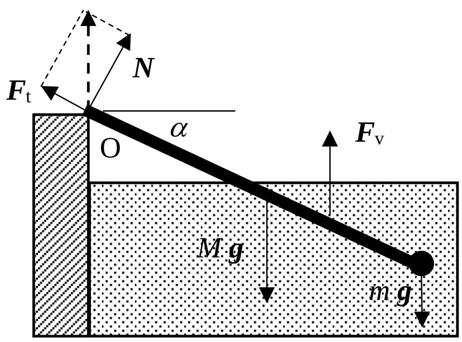
Tiažová sila tyče v jej ťažisku $M\,\boldsymbol{g}$

Tiažová sila závažia $m\,\boldsymbol{g}$

Vztlaková sila tyče v strede ponorenej časti $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$

Tlaková sila v bode opretia o okraj $\boldsymbol{N}$

Sila trenia v bode opretia $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$.



Obr. RC–1

b) Tyč zaujme rovnovážnu polohu podľa obrázku, ak sa z okraja bazéna nezošmykne, tzn. trenie zostane statické a platí $F_{\mathrm{t}} \le f\,N$.

V stave rovnováhy sú nulové výslednice vodorovných a zvislých zložiek síl. Pre vodorovné zložky platí

$$F_{\mathrm{t}} \cos\alpha = N \sin\alpha .$$

Z podmienky statického trenia dostávame podmienku

$$F_{\mathrm{t}} = N \tan\alpha \le f\,N \text{, odkiaľ } \tan\alpha \le f .$$

Z geometrických pomerov (obr. RC–1) dostávame

$$\sin\alpha = \frac{h}{L - l} \text{, kde } l \text{ je dĺžka ponorenej časti tyče.} \qquad (1)$$

Dĺžku l určíme z podmienky rovnováhy momentov síl vzhľadom na bod O

$$M\,g \frac{L}{2} \cos\alpha + m\,g\,L \cos\alpha - F_{\mathrm{v}} \left(L - \frac{l}{2} \right) \cos\alpha = 0 . \qquad (2)$$

Vztlaková sila

$$F_{\mathrm{v}} = l\,S\,\rho_0\,g = l\left(\frac{M}{L\rho}\right)\rho_0\,g\,. \qquad (3)$$

Po dosadení (3) do (2) dostávame po úprave

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{2}\left(2-\frac{l}{L}\right)\frac{l}{L}-\frac{1}{2}\,. \qquad (4)$$

Pre $l < L$ ide o rastúcu funkciu pomeru l/L, ktorý určíme zo vzťahu (1)

$$\frac{l}{L} = 1-\frac{h}{L\sin\alpha} = 1-\frac{h}{L}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}\text{ , a teda}$$

$$\frac{l}{L} \le 1-\frac{h}{L}\sqrt{\frac{1}{f^2}+1}\,. \qquad (5)$$

Pomer hmotností

$$\frac{m}{M} \le \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{h^2}{L^2}\frac{f^2+1}{f^2}\right)-1\right] = \left(\frac{m}{M}\right)_{\max}. \qquad (6)$$

Z podmienky $m/M > 0$ dostávame podmienku pre dĺžku tyče

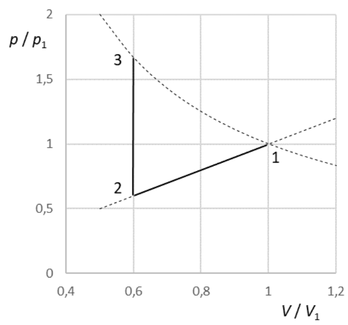
$$L > \frac{h}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)\dfrac{f^2}{f^2+1}}} = L_{\min}\,.$$

Pre dané hodnoty $L_{\min} \approx 94{,}3$ cm.
Pre $L > L_{\min}$ určíme pomer $(m/M)_{\max}$ zo vzťahu (6).
Napr. pre $L = 2{,}0$ m je $(m/M)_{\max} \approx 0{,}39$.

3) Dusík

Riešenie:

a) Diagram, obr. RC–2



Obr. RC–2

Hmotnosť určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p_1 V_1 = n R T = N_{\mathrm{A}}\,k_{\mathrm{A}}\,T\text{ , kde } n = \frac{m}{M}$$

a $R = 8{,}314\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ je plynová konštanta,
$N_{\mathrm{A}} = 6{,}023\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ Avogadrova konštanta a
$M = 28{,}0\ \mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ mólová hmotnosť dusíka (dvojatómové molekuly).
Odtiaľ máme hmotnosť plynu

$$m = p_1 V_1 \frac{M}{RT} \approx 345\ \mathrm{g}$$

a počet molekúl

$$N = n\,N_{\mathrm{A}} = N_{\mathrm{A}}\frac{p_1 V_1}{R T_1} \approx 7{,}41\times10^{24}.$$

b) Prácu možno určiť ako plochu pod grafom deja v p–V diagrame, obr. RC–2,

$$W = \frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_1-V_2) = \frac{1}{2}\left(p_1+\frac{3p_1}{5}\right)\left(V_1-\frac{3V_1}{5}\right) = \frac{8}{25}p_1V_1 \approx 9{,}6\ \mathrm{kJ}.$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{9}{25} T_1 \approx 106\ \text{K},\ \ t_2 \approx -168\ °\text{C}.$$

Ide o teplotu blízku bodu skvapalnenia dusíka $t_v = -195{,}8$ °C.

Dodané teplo

$$Q_1 = -\Delta U + W = -C_V\left(T_2 - T_1\right) + \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)\left(V_1 - V_2\right),$$

kde tepelná kapacita plynu 2-atómových molekúl

$$C_V = \frac{s}{2} n R = \frac{5}{2} n R.$$

$$Q_1 = -\Delta U + W = -\frac{5}{2}\left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right) + \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)\left(V_1 - V_2\right) = \frac{48}{25} p_1 V_1 \approx 57{,}6\ \text{kJ}.$$

c) Stavy 1 a 3 sa nachádzajú na izoterme, preto

$$p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_3} = \frac{5}{3} p_1 \approx 333\ \text{kPa}.$$

Pri deji 2–3 sa nekoná práca, preto dodané teplo je rovné zmene vnútornej energie

$$Q_2 = C_V\left(T_3 - T_2\right) = \frac{5}{2} n R\left(T_1 - T_2\right) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(T_1 - \frac{9}{25} T_1\right) = \frac{8}{5} p_1 V_1 \approx 48{,}0\ \text{kJ}.$$

$$q = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{48}{25} p_1 V_1 - \frac{8}{5} p_1 V_1 = \frac{8}{25} p_1 V_1,$$

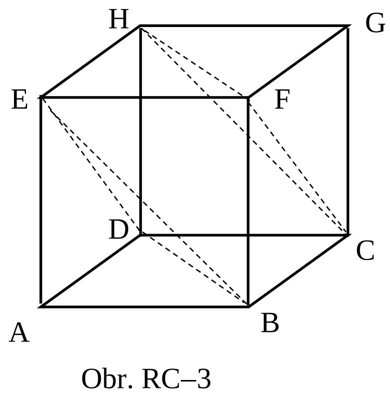
čo zodpovedá vykonanej práci W.

4) Odporová sieť

Riešenie:

a) Vzhľadom na uzly A a G je rovnaký potenciál troch uzlov E, B, D a rovnako trojice uzlov F, H, C. Tieto uzly teda môžeme spojiť bez ovplyvnenia obvodu, obr. RC–3.

Medzi vrcholom A a rovinou BDE sú paralelne tri strany AB, AD a AE s celovým odporom $R/3$. Rovnako medzi uzlom G a rovinou CHF. Medzi rovinami BDE a CFH je paralelne 6 strán EH, EF, BC, BF, DC, DH s celkovým odporom $R/6$. Vzhľadom na zdroj kocka predstavuje sériové zapojenie odporov $R/3$, $R/6$, $R/3$ s celkovým odporom



Obr. RC–3

$$R_a = 2\frac{R}{3} + \frac{R}{6} = \frac{5}{6} R.$$

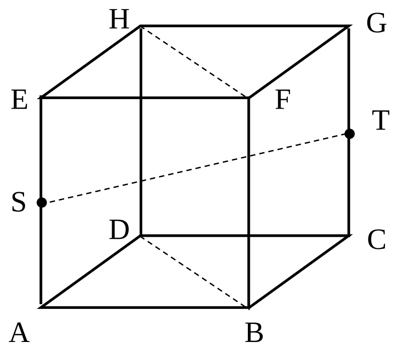
Prúd zdroja

$$I_{Z1} = \frac{U}{R_a} = \frac{6U}{5R}.$$

Prúdy vo vetvách AB, AD, AE, HG, CG, FG sú rovnaké $I_1 = \dfrac{I_{Z1}}{3} = \dfrac{2U}{5R}$

vo vetvách EH, EF, BF, BC, CD, DH je prúd $I_2 = \frac{I_{Z1}}{6} = \frac{U}{5R}$.

b) V tomto prípade je obvod súmerný podľa roviny BDHF, preto všetky uzly B, D, H, F majú rovnaký potenciál, takže vetvy FB a HD možno vynechať a uzly H, F a B, D spojiť bez zmeny správania sa obvodu, obr. RC–4.



Obr. RC–4

Medzi uzlami E a G, resp. A a C, je odpor R.

$R_{SE} = R_{GT} = R/2$. Vetvy SEGT a SACT s odporom $2R$ sú paralelné, a teda výsledný odpor

$$R_b = R_{ST} = R.$$

Prúd zdroja

$$I_{Z2} = \frac{U}{R}.$$

Prúd vo vetvách SE, SA, GT, CT je rovnaký

$$I_3 = \frac{I_{Z2}}{2} = \frac{U}{2R}.$$

Vo vetvách EH, EF, AD, AB, HG, FG, DC, BC je rovnaký $I_4 = \frac{I_{Z2}}{4} = \frac{U}{4R}$.

Prúd vo vetvách HD a BF je nulový.

5) Balón s héliom

Riešenie:

a) Tlak v izotermickej atmosfére určuje barometrická formula

$$p = p_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{M_{vz} g h}{RT}},$$

kde h je výška nad úrovňou s tlakom p_0.

Pre dané hodnoty $p_1 \approx$ 68,1 kPa.

b) Podľa predpokladu je tlak vo vnútri balóna rovnaký ako tlak p_1 okolitého vzduchu.

V ustálenej výške platí rovnováha síl tiažových a vztlakovej

$$(m_1 + m_2 + m_{He}) g = \rho_1 V_1 g, \qquad (1)$$

kde V_1 je objem balóna a ρ_1 hustota vzduchu vo výške h_1.

Hmotnosť hélia

$$m_{He} = M_{He} \frac{p_1 V_1}{RT_0}$$

a hustota vzduchu

$$\rho_1 = \frac{m_{vz}}{V_1} = M_{vz} \frac{p_1}{RT_0}.$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$m_1 + m_2 = (M_{vz} - M_{He}) \frac{p_1 V_1}{RT_0},$$

odkiaľ určíme objem balóna

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi d_1^3 = \frac{RT_0}{p_1}\frac{m_1+m_2}{M_{vz}-M_{He}} = \frac{RT_0}{p_0}\frac{m_1+m_2}{M_{vz}-M_{He}}\,e^{\frac{M_{vz}h_1 g}{RT_0}}$$

a priemer balóna

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{6RT_0}{\pi p_0}\frac{m_1+m_2}{M_{vz}-M_{He}}}\,e^{\frac{M_{vz}h_1 g}{3RT_0}}\,.$$

Pre dané hodnoty $d_1 \approx 11{,}9$ m

Hmotnosť hélia v balóne

$$m_{He} = \frac{M_{He}}{M_{vz}-M_{He}}\left(m_1+m_2\right).$$

Pre dané hodnoty $m_{He} \approx 100$ kg.

c) Keďže teplota hélia v balóne sa s výškou nemení, pre pomer objemov platí

$$\eta = \frac{V_1}{V_0} = \frac{p_0}{p_1} = e^{\frac{M_{vz}h_1 g}{RT_0}}\,.$$

Pre dané hodnoty $\eta \approx 1{,}51$.

Objem balóna sa zvýši približne o 50 %.

6) Prietokový ohrievač

Riešenie:

a) Určíme odpor vody medzi valcami. Keďže je vzdialenosť elektród podstatne menšia ako ich polomer, môžeme použiť vzťah pre odpor látky medzi dvomi rovnobežnými doskami

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{r_2-r_1}{2\pi\frac{r_2+r_1}{2}L}\,.$$

Prúd zdroja je

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\pi\sigma L\left(r_2+r_1\right)}{r_2-r_1}U \approx 198\ \text{A}.$$

b) Na zohriatie vody s objemom ΔV o teplotný rozdiel $\Delta t = t_2 - t_1$ musíme dodať teplo

$$Q = \rho V c\left(t_2-t_1\right).$$

Elektrická energia dodaná vode za dobu $\Delta\tau$

$$E = P\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta\tau\,.$$

Pre teplo dodané formou elektrickej energie dostávame

$$\rho\Delta V c\left(t_2-t_1\right) = \frac{U^2}{R}\Delta\tau\,,$$

odkiaľ vyjadríme objemový prietok vody pri napätí U_1

$$q_1 = \frac{\Delta V}{\Delta\tau} = \frac{\pi\sigma L}{\rho c\left(t_2-t_1\right)}\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}U_1^2 \approx 2{,}83\times10^{-4}\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 283\ \text{mL}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Napätie potrebné na zohriatie vody s prietokom q na teplotu t je

$$U^2 = \frac{\rho c (t - t_1)}{\pi \sigma L} \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} q \,.$$

Na zohriatie vody na teplotu T_3 pri prietoku q_1 je potrebné napätie

$$U_2 = \sqrt{\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}}\, U_1 \;\approx\; 224 \text{ V.}$$

7) Valivý odpor

Riešenie:

Pri pohybe valca po naklonenej rovine sa mení potenciálna energia na kinetickú a vnútornú

$$m g L \sin\alpha = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{v}{R}\right)^2 + F_\mathrm{v} L \,.$$

Uvažujme valec $J = \frac{1}{2} m R^2$ a bezstratový pohyb.

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} g L \sin\alpha} \,.$$

Čas pohybu určíme z času rovnomerne zrýchleného pohybu

$$L = \frac{1}{2} v_0 t_0 \text{, resp. } t_0 = \frac{2L}{v_0} = \sqrt{\frac{3L}{g \sin\alpha}} \,.$$

S uvažovaním valivého odporu

$$F_\mathrm{v} = m g \sin\alpha - \frac{3}{4L} m v^2 = m g \sin\alpha - \frac{3}{4L} m \left(\frac{2L}{t_1}\right)^2 = m\left(g \sin\alpha - \frac{3L}{t_1^2}\right),$$

pričom

$$F_\mathrm{v} = \frac{\xi}{R} m g \cos\alpha \,,$$

a teda

$$\xi = \frac{R}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{3L}{g t_1^2}\right) = R \tan\alpha \left(1 - \frac{t_0^2}{t_1^2}\right).$$

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (2, 3, 5, 6), Aba Teleki (1), Kamil Bystrický (4), Ivo Čáp (7)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022