64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória D

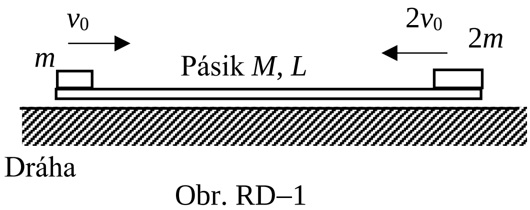
Domáce kolo – riešenie úloh

1) Stretnutie na polceste

Riešenie:

a) Na kotúče pôsobia počas pohybu sily trenia

$$F_1 = -\,f\,m\,g \quad \text{a} \quad F_2 = 2\,f\,m\,g\,.$$



Obr. RD–1

Vyjadríme rýchlosti v_1, v_2, ktoré získajú kotúče za čas τ pohybu pred zrážkou (vzhľadom na dráhu)

$$v_1 = v_0 - f\,g\,\tau\,, \quad v_2 = -2v_0 + f\,g\,\tau\,.$$

Na pásik pôsobia sily trenia opačného smeru $F_\mathrm{p} = f\,m\,g - 2\,f\,m\,g$ a udelí pásiku rýchlosť

$$v_\mathrm{p} = \frac{f\,m\,g - 2\,f\,m\,g}{M}\tau = -\frac{m}{M}\,f\,g\,\tau\,. \qquad (1)$$

Za čas τ prejde pásik dráhu

$$s_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\frac{f\,m\,g}{M}\tau^2$$

v smere k menšiemu kotúču a kotúče prejdú dráhu (vzhľadom na podložku)

$$s_1 = v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2 \quad \text{a} \quad s_2 = 2v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2\,.$$

Dráhy telies vzhľadom na pásik majú byť rovnaké $L/2$

$$s_1 + s_\mathrm{p} = v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{f\,m\,g}{M}\tau^2 = v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2\left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{L}{2}$$

$$s_2 - s_\mathrm{p} = 2v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{L}{2}\,.$$

Z rovnosti posunutí po povrchu pásika dostávame

$$v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2\left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{L}{2}$$

$$2v_0\,\tau - \frac{1}{2}\,f\,g\,\tau^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{L}{2}$$

Z rozdielu rovníc dostávame po úprave vzťah

$$\frac{m}{M} = \frac{v_0}{f\,g\,\tau}\,,$$

ak od dvojnásobku prvej rovnice odčítame druhú, dostávame

$$\left(3\frac{m}{M} - 1\right) f\,g\,\tau^2 = L\,.$$

Z oboch rovníc určíme

$$v_0 = \frac{p}{3p-1}\,\frac{L}{\tau}\,, \qquad (2)$$

$$f = \frac{1}{3p-1}\,\frac{L}{g\tau^2}\,. \qquad (3)$$

Určíme podmienky, aby daná situácia mohla nastať.

Faktor trenia $f > 0$ a $v_0 > 0$, odkiaľ dostávame podmienku $p > \frac{1}{3}$.

V okamihu tesne pred zrážkou za čas τ musia byť rýchlosti kotúčov vzhľadom na pásik nenulové a súčasne platia podmienky

$v_1 - v_\mathrm{p} > 0$ a $v_2 - v_\mathrm{p} < 0$.

Prvá podmienka:

$$v_1 - v_\mathrm{p} = v_0 - (1-p)\, f\, g\, \tau > 0\,.$$

Po dosadení za v_0 a f dostávame $p > \frac{1}{2}$ (4)

Druhá podmienka:

$$v_2 - v_\mathrm{p} = -2v_0 + (p+1)\, f\, g\, \tau < 0\,.$$

Po dosadení za v_0 a f dostávame

$$p > 1\,.$$

Keďže prvá i druhá podmienka musia byť splnené súčasne, je výsledná podmienka $p > 1$.

b) Podmienka $p > 1$ je splnená iba pre tretiu hodnotu $p = 1{,}5$.

Pre túto podmienku a $p = 1{,}5$ je $v_0 = 0{,}82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $f = 0{,}26$.

(pre kontrolu v čase tesne pred zrážkou $v_1 = 0{,}21\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = -\,1{,}03\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Pre $p = 0{,}75$ síce dostaneme dosadením do vzťahov (2) a (3)

$v_0 = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $f = 0{,}71$,

ale rýchlosť tesne pred zrážkou $v_1 = -\,4{,}22\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, čo odporuje zadaniu úlohy.

Pre $p = 0{,}25$ je $f < 0$, čo nedáva fyzikálny zmysel.

2) Cyklista

Riešenie:

a) Pre dráhu platí postupne

$$d = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2\,, \qquad (1)$$

$$2d = v_1 (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} a (t_1 + t_2)^2\,, \qquad (2)$$

$$3d = v_1 (t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2} a (t_1 + t_2 + t_3)^2\,. \qquad (3)$$

Z rovníc pre tri neznáme v_1, a a t_3 určíme začiatočnú rýchlosť

$$v_1 = \frac{d}{t_1 t_2}\,\frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{t_1 + t_2} \approx 4{,}05\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 14{,}6\ \mathrm{km/h}. \qquad (4)$$

b) Zrýchlenie pohybu

$$a = \frac{2d}{t_1 t_2} \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} \approx 0{,}48 \text{ m·s}^{-2}. \qquad (5)$$

c) Rovnicu (3) upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$\left(t_1 + t_2 + t_3\right)^2 + 2\frac{v_1}{a}\left(t_1 + t_2 + t_3\right) - \frac{6d}{a} = 0\,,$$

ktorá má riešenie

$$t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{v_1}{a} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 + \frac{6d}{a}}\,.$$ (Znamienko (-) nemá fyzikálny zmysel)

Čas prechodu medzi tretím a štvrtým stĺpikom

$$t_3 = \frac{1}{2}\frac{\left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1^2}{t_1 - t_2}\left\{\sqrt{1 + \frac{12 t_1 t_2 \left(t_1^2 - t_2^2\right)}{\left[\left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1^2\right]^2}} - 1\right\} - t_2 - t_1 \;\approx\; 2{,}51 \text{ s}.$$

d) Výsledná rýchlosť

$$v_4 = v_1 + a\left(t_1 + t_2 + t_3\right) = d\,\frac{\left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1^2}{t_1 t_2 \left(t_1 + t_2\right)}\sqrt{1 + \frac{12 t_1 t_2 \left(t_1^2 - t_2^2\right)}{\left[\left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1^2\right]^2}} \approx 8{,}58 \text{ m·s}^{-1} \approx 30{,}1 \text{ km/h}$$

Iná možnosť – zmena kinetickej energie je rovná vykonanej práci

$$\frac{1}{2} m v_4^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = F\,(3d) = 3 m a d$$

$$v_4 = \sqrt{v_1^2 + 6ad} = d\sqrt{\left[\frac{1}{t_1 t_2}\frac{\left(t_1 + t_2\right)^2 - 2t_1^2}{t_1 + t_2}\right]^2 + \frac{12}{t_1 t_2}\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}} \approx 8{,}58 \text{ m·s}^{-1}.$$

3) Model rakety

Riešenie:

a) Pohyb zvislo hore

$$h = \frac{1}{2} a t^2\,, \text{ odkiaľ } \; a = \frac{2h_1}{t_1^2} \;\approx\; 10{,}2 \text{ m·s}^{-2}.$$

Reaktívna sila

$$F = mg + ma = m\left(g + \frac{2h_1}{t_1^2}\right) \approx 6{,}0 \text{ N}.$$

b) Vo výške h_1 má raketa rýchlosť

$$v_1 = a t_1 = \frac{2h_1}{t_1} \;\approx\; 42{,}9 \text{ m·s}^{-1} \approx 154 \text{ km/h}.$$

Výška a rýchlosť rakety po vyhorení paliva

$$h = h_1 + v_1\left(t - t_1\right) - \frac{1}{2} g \left(t - t_1\right)^2 \quad \text{a} \quad v = v_1 - g\left(t - t_1\right).$$

V najvyššom bode $v = 0$, odkiaľ

$$\left(t_2 - t_1\right) = \frac{v_1}{g} = \frac{2h_1}{g\,t_1} \quad \text{a} \quad h_2 = h_1 + \frac{1}{2}g\left(\frac{2h_1}{g\,t_1}\right)^2 \approx 184 \text{ m.}$$

c) Z výšky h_2 padá voľným pádom

Čas pádu

$$t_\text{p} = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left[h_1 + \frac{1}{2}g\left(\frac{2h_1}{g\,t_1}\right)^2\right]} \approx 6{,}12 \text{ s.}$$

Celkový čas letu

$$t_3 = t_2 + t_\text{p} = t_1 + \frac{2h_1}{g\,t_1} + \sqrt{\frac{2}{g}\left[h_1 + \frac{1}{2}g\left(\frac{2h_1}{g\,t_1}\right)^2\right]} \approx 14{,}7 \text{ s.}$$

4) Gule vo vode

Riešenie:

a) Vyjadríme silu F_1 zo vzťahu

$$F_1 - \frac{2}{3}F_1 = \rho_0 V g \text{, odkiaľ máme } F_1 = 3\rho_0 V g \,.$$

Hustota ťažšej gule $\rho_1 = 3\,\rho_0 \approx 3{,}00$ g·cm^{-3}.

Pre ľahšiu guľu platí

$$\rho_2 V g = \frac{2}{3}\rho_0 V g \text{, odkiaľ } \rho_2 = \frac{2}{3}\rho_0 \approx 0{,}667 \text{ g·cm}^{-3}.$$

b) Senzor zaznamená silu

$$F_2 = \frac{5}{9}F_1 \approx 138{,}9 \text{ mN.}$$

c) Vlákno je napínané silou

$$F_3 = \left(\rho_0 - \rho_2\right)V g = \frac{\rho_0 - \rho_2}{3\rho_0}F_1 = \frac{F_1}{9} \approx 27{,}8 \text{ mN.}$$

5) Eskalátor

Riešenie:

a) Aby bolo možné akciu realizovať, musí platiť $v_1 > u$, $v_2 > u$.

Tašky sa pohybujú smerom nadol rýchlosťou u a za čas t prejdú vzdialenosť

$$s = u\,t. \tag{1}$$

Prvý chlapec bežal nahor rýchlosťou v_1 vzhľadom na pás a rýchlosťou $v_1 + u$ vzhľadom na schodište. Vzdialenosť $L/2$ k hornému koncu schodišťa prejde za čas

$$t_{11} = \frac{L}{2\left(v_1 + u\right)} \,. \tag{2}$$

Potom skočí na druhý pás idúci nadol a k taškám prejde vzdialenosť $s_1 = L/2 + s$ rýchlosťou $v_2 + u$ za čas $t_{12} = t - t_{11}$, pričom

$$t_{12} = \frac{L/2+s}{v_2+u} \quad . \qquad (3)$$

Z uvedených vzťahov (1) až (3) dostávame čas behu

$$t_1 = t_{11} + t_{12} = \frac{L}{2v_2}\frac{v_2+v_1+2u}{v_1+u} \, . \qquad (4)$$

Druhý chlapec sa rozbehne nadol proti smeru pohybu schodov a vzdialenosť $L/2$ k dolnému koncu eskalátora prejde za čas

$$t_{21} = \frac{L}{2(v_2-u)} \, . \qquad (5)$$

Potom prebehne na druhé schody a beží proti smeru ich pohybu rýchlosťou v_1 vzhľadom na schody a rýchlosťou $v_1 - u$ vzhľadom na okolie. K taškám prejde dráhu $L/2 - s$ vzhľadom na okolie. Čas pohybu k taškám

$$t_{22} = \frac{L/2-s}{v_1-u} \, . \qquad (6)$$

Zo vzťahov (1), (5) a (6) dostaneme

$$t_2 = \frac{L}{2v_1}\frac{v_1+v_2-2u}{v_2-u} \, . \qquad (7)$$

Z rovnosti časov $t_1 = t_2$ podľa (4) a (7) dostávame po úprave rovnicu

$$(v_2-v_1)^2 = 2u(v_2-v_1), \text{ resp. } (v_2-v_1)(v_2-v_1-2u) = 0 \, .$$

Aby chlapci dobehli k taškám súčasne, musí platiť
– prvé riešenie je $v_1 = v_2$, alebo
– druhé riešenie $v_2 - v_1 = 2u$.

Pre prvé riešenie $v_1 - v_2$ máme

$$t = \frac{L}{2v_1}\frac{2v_1+2u}{v_1+u} = \frac{L}{v_1} \quad \text{a} \quad s = u\,t = L\frac{u}{v_1} < \frac{L}{2}, \text{ a teda } u < \frac{v_1}{2} = \frac{v_2}{2} \, .$$

Pre druhé riešenie $v_2 - v_1 - 2u = 0$ máme $t_{11} = t_{21}$ a ďalej

$$t = \frac{2L}{v_2+v_1} \quad \text{a} \quad s = u\,t = L\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} < \frac{L}{2}, \; v_2 > v_1 \text{ a } v_2 < 3\,v_1 \text{ a ďalej } u = \frac{v_2-v_1}{2} \, .$$

b) Pre $v_1 = v_2$ za uvedených podmienok je u ľubovoľné, ak spĺňa podmienku $u < \frac{v_1}{2} = \frac{v_2}{2}$.

Potom dostávame

$$d = \frac{L}{2} - s = \frac{v_1-2u}{2v_1}L \quad .$$

Pre $v_2 - v_1 = 2u$ za uvedených podmienok je $t_{11} = t_{21} = t/2$ a $t_{12} = t_{22}$ a máme

$$d = \frac{L}{2} - s = \frac{3v_1 - v_2}{v_2 + v_1}\,\frac{L}{2}\,.$$

c) i. Pre tento prípad splnené podmienky pre prvé riešenie.

$$d = \frac{v_1 - 2u}{2v_1} L \approx 3{,}0\ \text{m}.$$

ii. Pre prvé riešenie nevyhovuje podmienke $v_1 > 2\,u$.

iii. Pre druhé riešenie sú podmienky splnené

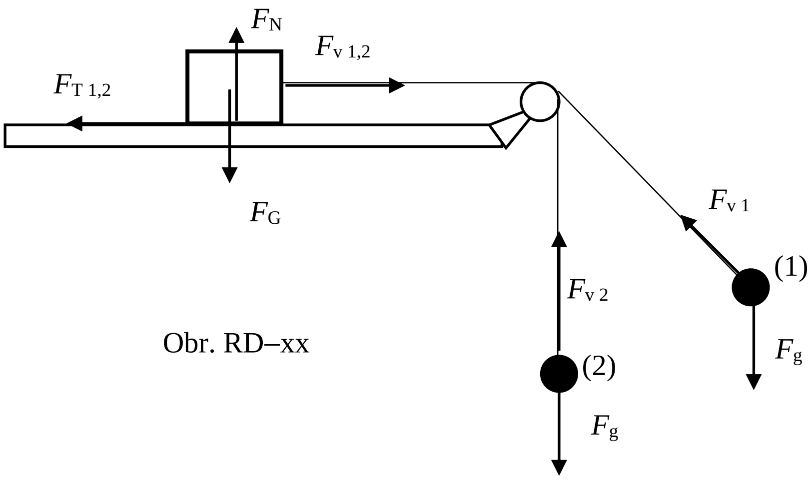
$$d = \frac{3v_1 - v_2}{v_2 + v_1}\,\frac{L}{2} \approx 5{,}5\ \text{m}.$$

iv. Pre druhé riešenie $u < 0$, čo riešeniu nevyhovuje.

6) Hranol na stole

Riešenie:

a) Obrázok



Obr. RD–xx

Na teleso B pôsobia sily: tiažová $F_G = M\,g$, tlak podložky $F_N = F_G$, ťahová sila vlákna F_{v1} v polohe (1) závažia, resp. F_{v2} v polohe (2) a sila trenia F_T.
Na závažie pôsobia sily: tiažová $F_g = m\,g$ a sila ťahu vlákna F_v.

b) Ak sa teleso neprešmykne, je trenie medzi telesom B a povrchom stola statické a platí

$$F_T = F_v \le f\ F_N = f\ F_G\,.$$

Z obr. RD–xx vidíme, že ťahová sila vlákna je najmenšia v hornej polohe a najväčšia v dolnej polohe.
Na závažie pôsobí v polohe (2) výsledná sila $F_g - F_v$ kolmá na smer pohybu, a tá udeľuje závažiu dostredivé zrýchlenie

$$m\,g - F_v = m\,a = -m\,\frac{v^2}{L}\ .$$

Rýchlosť v v najnižšom bode trajektórie určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$m\,g\,h = \frac{1}{2} m v^2 \text{, odkiaľ } v = \sqrt{2\,g\,h}\,.$$

Pre ťahovú silu v polohe (2) dostávame

$$F_\mathrm{v} = m\,g + m\frac{v^2}{L} = m\,g\left(1 + \frac{2h}{L}\right).$$

Z podmienky statického trenia máme

$$m\,g\left(1 + \frac{2h}{L}\right) \le f\,M\,g\,.$$

Odtiaľ dostávame podmienku pre hmotnosť závažia

$$m \le f\,\frac{L}{L+2h} M = m_\mathrm{max} \approx 27{,}8\ \mathrm{g}.$$

7) Meranie hustoty

Meranie podľa zadaných úloh a odporúčanej metodiky.

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (1, 2, 4, 5, 6), Kamil Bystrický (3), Ivo Čáp (7)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022