64. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2022/2023
Kategória G – Archimediáda
Úlohy domáceho kola – riešenie úloh

1) Valčeky v ľade

Riešenie:

a) Akýkoľvek fyzikálne prijateľný argument, z ktorého vyplynie, že hustota valčeka v kockách A, B, C je väčšia, ako hustota ľadu. 2 body

Jedným z jednoduchších argumentov je napr. Kocka B sa vznáša vo vode, preto priemerná hustota kocky s valčekom sa musí rovnať hustote vody ρ_V. Z toho vyplýva, že hustota valčeka musí byť väčšia, ako hustota vody.

Priemerná hustota ρ_A kocky A je väčšia, ako ρ_B, lebo množstvo materiálu hustejšieho valčeka je rovnaká, ale množstvo ľadu je menšia (väčšia časť valčeka je zamrznutá v kocke). Kocka A preto poklesne na dno pohára 1 1 bod

Priemerná hustota ρ_C je menšia než ρ_B, lebo pri rovnakom valčeku je množstvo ľadu väčšie. Kocka C vypláva na voľnú hladinu vody. 1 bod

b) Akýkoľvek fyzikálne prijateľný argument, z ktorého vyplynie, že hustota valčeka v kockách D, E, F je menšia, ako hustota ľadu. 2 body

Jedným z jednoduchších argumentov je napr.: O orientácii kocky s valčekom v ľade rozhoduje ich hustota. Orientácia vznášajúcej sa kocky s valčekom väčšej hustoty než je hustota ľadu je, ako na obr. (a).Hustota valčeka na obr. (b) teda nemôže byť väčšia ako hustota ľadu, lebo by musela byť orientácia rovnaká akú má kocka B v pohára 1. Hustota valčeka v kocke E je teda menšia, ako hustota ľadu. Kocka E sa pritom vznáša, preto jej priemerná hustota je rovnaká ako hustota neznámej kvapaliny. Z toho vyplýva, že hustota neznámej kvapaliny je väčšia ako hustota valčeka v kocke E ale je menšia, ako hustota ľadu.

Priemerná hustota kocky D je menšia ako priemerná hustota kocky E, lebo je v nej menej ľadu, preto vypláva na voľnú hladinu neznámej kvapaliny 1 bod

Naopak, priemerná hustota a F je väčšia ako priemerná hustota kocky E, preto poklesne na dno pohára 2. 1 bod

c) Priemerná hustota kociek D, E a F je menšia, než hustota ľadu, preto všetky kocky vyplávajú na voľnú hladinu vody v pohára 1 1 bod

Priemerná hustota kociek A, B a C je väčšia ako hustota ľadu, preto po vložení do neznámej kvapaliny všetky poklesnú na dno pohára 2 1 bod.

2) Autobus

Riešenie:

a) AB – autobus je v pokoji, BC – Autobus sa pohybuje konštantnou rýchlosťou ($v = 20\ \mathrm{m/s}$), CD – autobus v pokoji.

Aspoň jeden úsek je popísaný správne, 0,5 bodu
všetko popísané správne (teda maximálny počet bodov) 1 bod

b) Autobus sa pohybuje po dobu $t_\mathrm{C} - t_\mathrm{B} = 50$ s rýchlosťou $v = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a prejde vzdialenosť $s_{\mathrm{BC}} = v(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}) = 1000$ m. 2 body

Veličiny $\frac{v}{(\mathrm{m/s})}$ ako aj $\frac{t_{\mathrm{C}}-t_{\mathrm{B}}}{\mathrm{s}}$ sú bezrozmerné veličiny, ktorých súčin určuje matematicky definovanú plochu veľkosti 1000 a z predchádzajúceho vzťahu $S_{\mathrm{BC}} = \frac{s_{\mathrm{BC}}}{\mathrm{m}} = \frac{v}{(\mathrm{m/s})} \frac{t_{\mathrm{C}}-t_{\mathrm{B}}}{\mathrm{s}}$.

Akýkoľvek prijateľný argument 2 body

c) AB – autobus stojí, BC – autobus sa rozbieha, CD – autobus sa pohybuje konštantnou rýchlosťou ($v = 20$ m/s,) DE – autobus spomaľuje EF – autobus stojí.

Aspoň jeden úsek je popísaný správne 0,5 boda,

všetko popísané správne (teda maximálny počet bodov) 1 bod

d) Autobus rozbieha na úseku BC. Plocha pod grafom rýchlosti na úseku BC

$S_{\mathrm{BC}} = \frac{s_{\mathrm{BC}}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \frac{v_{\mathrm{C}}-v_{\mathrm{B}}}{(\mathrm{m/s})} \frac{t_{\mathrm{C}}-t_{\mathrm{B}}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150 \Rightarrow s_{\mathrm{BC}} = 150$ m. 1 bod

Autobus zastavuje na úseku BC. Plocha pod grafom rýchlosti na úseku BC

$S_{\mathrm{DE}} = \frac{s_{\mathrm{DE}}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \frac{v_{\mathrm{D}}-v_{\mathrm{E}}}{(\mathrm{m/s})} \frac{t_{\mathrm{E}}-t_{\mathrm{D}}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{2} \times 20 \times 5 = 50 \Rightarrow s_{\mathrm{DE}} = 50$ m. 1 bod

e) Vzdialenosti pri rozbiehaní a rozbiehaní sme určili v časti d). Na úseku CD sa autobus pohybuje konštantnou rýchlosťou $v = 20$ m/s a prejde dráhu $s_{\mathrm{CD}} = v(t_{\mathrm{D}} - t_{\mathrm{C}}) = \left(20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(25 \mathrm{~s}) = 500$ m.

Celkom prejdená dráha je $s_{\mathrm{AF}} = s_{\mathrm{BC}} + s_{\mathrm{CD}} + s_{\mathrm{DE}} = 700$ m. 1 bod

f) Priemerná rýchlosť medzi B a E $v_{\mathrm{priem}} = \frac{s_{\mathrm{BE}}}{t_{\mathrm{E}}-t_{\mathrm{B}}} = \frac{700 \mathrm{~m}}{50 \mathrm{~s}} = 14 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 50{,}4 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. 1 bod

3) Mokrý ježko

Riešenie:

a) Ježko sa ponoril celý a bolo nadnášané silou $F_1 = \rho V g$, kde V je objem ježka a g je gravitačná konštanta na Zemi . 1 bod

Rovnakou silou, len opačne orientovanou pôsobí ježko na vodu a následne aj voda na váhy. 1 bod

Váhy ukazujú hmotnosť m telesa, ktorá pôsobí svojou tiažou $T = mg$ na váhy. Čo váhy ukazujú v časti (a) $m_1 = \rho V$ je hmotnosť vody, ktorú ježko vytlačil, keď sa celý ponoril.

Objem ježka $V = \frac{m_1}{\rho} = 12{,}00$ cm^3. 1 bod

Keď ježko klesne na dno pohára a niť je uvoľnená, na váhy pôsobí okrem pohára a vody (vynulovaný stav) aj tiaž ježka. Hmotnosť ježka $m_2 = 21{,}00$ g a jeho váha je

$F_{\mathrm{j}} = m_2 g = 196{,}2$ mN. 2 body

b) Priemerná hustota ježka $\rho_{\mathrm{j}} = \frac{m_2}{V} = 1{,}75$ g/cm^3. 2 body

c) Gravitačná konštanta na Mesiaci $g_{\mathrm{M}} = 1{,}625$ N/kg 1 bod

Na Mesiaci by objem vytlačenej vody bol stále $V = 12{,}00$ cm^3, ale tiaž tohto množstva vody na Mesiaci $F_{\mathrm{M}} = \rho V g_{\mathrm{M}}$. Váhy ukazujú hmotnosť m_{M}, ktorá by mala rovnakú tiaž na Zemi,

teda $m_{\mathrm{M}} = \rho V \frac{g_M}{g} = 1{,}988\ g$. 2 body

4) Satelity nad hlavami

Riešenie:

a) Priemerná hmotnosť m_p satelitov v danej vrstve $m_\mathrm{p} = M/N$, kde M je súhrnná hmotnosť satelitov v danej vrstve a N je počet satelitov v tejto vrstve. 1 bod

Vrstva 13, v ktorej je priemerná hmotnosť aktívnych satelitov najväčšia, je vrstva vo výške 30 až 40 tisíc km. 1 bod

$m_\mathrm{p} = 3827{,}6$ kg. 1 bod

b) Čím menší objem pripadá v priemere na jeden aktívny satelit (vo vrstve), tým je menšia priemerná vzdialenosť medzi satelitmi vo vrstve. 2 body

Objem medzi guľou s polomerom R_2 a s polomerom R_1 je $V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$. 1 bod

Tento objem predelíme s počtom N_a aktívnych satelitov, a pomer $V_\mathrm{p} = V/N_\mathrm{a}$ 1 bod

Najmenší priemerný objem na jeden satelit pripadá na vrstvu 5 (500-600 km nad povrchom Zeme). $V_\mathrm{p} = 18\,370\,000\ \mathrm{km}^3$. 1 bod

c) Počet všetkých aktívnych satelitov $N_\mathrm{A} = 4852$, kým počet všetkých (vrátane aktívnych a neaktívnych) $N_\mathrm{AN} = 7389$, teda koeficient úmery $k = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = \frac{7389}{4852} = 1{,}523$. 1 bod

V priemere pripadne na jeden satelit (aktívny, či neaktívny) k-krát menší priestor, v každej vrstve rovnako, preto najbližšie k sebe budú satelity znova vo vrstve 5 (500-600 km nad povrchom Zeme) [v ktorej priemerný objem pripadajúci na jeden satelit bude
$18\,370\,000\ \mathrm{km}^3 : 1{,}523 \approx 12\,062\,000\ \mathrm{km}^3$]. 1 bod

Pozn.: Pokiaľ závery v časti c) súťažiaci odvádza od časti b) a jeho argumentácia je správna, uznáme plný počet aj vtedy, ak sa v časti b) pomýlil v označení správnej vrstvy, alebo vzdialenosť nevyčíslil. Pre opravu sú výsledky zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

R_1/km	počet vo vrstve od R_1 do R_2	priemerná hmotnosť m_p/kg	priemerný objem na jeden aktívny satelit vo vrstve V_p/km^3	Odhadovaná vzdialenosť vo vrstve ℓ/km	objem na jeden aktívny alebo neaktívny satelit vo vrstve V_an/km^3	Odhadovaná vzdialenosť vo vrstve ℓ_an/km
150	5	540,0	5 396 253 000	1 754	3 543 459 000	1 525
200	189	586,6	292 093 000	663	191 803 000	577
300	191	373,9	297 822 000	668	195 565 000	580
400	579	195,4	101 187 000	466	66 445 000	405
500	2156	228,2	27 976 000	304	18 370 000	264
600	281	569,8	220 889 000	604	145 047 000	525
700	94	887,4	679 242 000	879	446 025 000	764
800	50	1223,2	1 313 055 000	1 095	862 220 000	952
900	15	2313,0	4 498 796 000	1 651	2 954 142 000	1 435
1000	592	429,8	28 243 172 000	3 045	18 545 929 000	2 647
10000	38	1454,5	1 538 891 692 000	11 545	1 010 515 968 000	10 035
20000	91	1315,3	1 371 132 188 000	11 109	900 356 391 000	9 656
30000	569	3827,6	379 966 459 000	7 243	249 505 652 000	6 295

Tab. RG-1 Pre kontrolu výsledkov pre rôzne vrstvy

5) Solenie chodníkov

Riešenie:

Podľa úrovne riešenia úlohy 0 až 10 bodov

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie G*

Autori návrhov úloh:	Boris Lacsný (1, 2, 3, 5), Aba Teleki (4)
Recenzia:	Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2022