64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória D

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Vodorovný vrh

Riešenie:

a) Kameň padá voľným pádom, pre ktorý platí

$$h_0 = \frac{1}{2} g\, t_0^2 \approx 15{,}9 \text{ m}$$

a $\quad v_0 = g\, t_0 \approx 17{,}6 \text{ m·s}^{-1} \approx 63{,}5 \text{ km·h}^{-1}.$

b) Vodorovný vrh sa skladá z pohybu v zvislom smere a pohybu vo vodorovnom smere. Tieto pohyby sa pri zanedbaní odporu vzduchu vzájomne neovplyvňujú. Nezávisle od začiatočnej rýchlosti vo vodorovnom smere trvá pád čas t_0 a pohyb vo vodorovnom smere je rovnomerný so začiatočnou rýchlosťou.

$$d_1 = v_{01}\, t_0 \text{, kde } v_{01} = d_0 \frac{N}{n} \approx 12 \text{ m·s}^{-1}.$$

Odtiaľ máme

$$d_1 = \frac{N}{n} t_0\, d_0 = 21{,}6 \text{ m.}$$

Rýchlosť dopadu

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_{01}^2} = \sqrt{\left(g\, t_0\right)^2 + \left(d_0 \frac{N}{n}\right)^2} \approx 21{,}3 \text{ m·s}^{-1}.$$

c) Pre dvojnásobný dolet

$$d_2 = 2\, d_1 = v_{02}\, t_0 \text{, odkiaľ } v_{02} = \frac{2\, d_1}{t_0} = \frac{2\, N}{n} d_0 \approx 24 \text{ m·s}^{-1}.$$

d) Ak je rýchlosť dopadu dvojnásobná, platí

$$v_3 = \sqrt{v_0^2 + v_{03}^2} = 2\, v_1 = 2\sqrt{v_0^2 + v_{01}^2} = 2\sqrt{\left(g\, t_0\right)^2 + \left(d_0 \frac{N}{n}\right)^2} \text{ .}$$

Odtiaľ dostávame

$$v_{03} = \sqrt{3\left(g\, t_0\right)^2 + \left(2 d_0 \frac{N}{n}\right)^2} \approx 38{,}9 \text{ m·s}^{-1}.$$

2) Rozbiehanie vlaku

Riešenie:

a) Pre dráhu a rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu platí

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{a} \quad v = a\,t\,.$$

Začiatok a koniec vozňa s poradovým číslom m prechádzal okolo Pavla v časoch

$$t_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2\,(m-k)\,l}{a}}\,, \quad t_{\mathrm{m+1}} = \sqrt{\frac{2\,(m+1-k)\,l}{a}}\,.$$

Čas prechodu m–tého vozňa okolo Pavla

$$\Delta t_{\mathrm{m}} = t_{\mathrm{m+1}} - t_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2\,(m+1-k)\,l}{a}} - \sqrt{\frac{2\,(m-k)\,l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{a}}\left(\sqrt{m+1-k} - \sqrt{m-k}\right),$$

odkiaľ máme pre m = 5 a k = 3

$$a = \frac{2l}{\Delta t_{\mathrm{m}}^2}\left(\sqrt{m-k+1} - \sqrt{m-k}\right)^2 = \frac{2l}{\Delta t_{\mathrm{m}}^2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \approx 0{,}69\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

b) Tretí vozeň mal nulovú začiatočnú rýchlosť, preto

$$l = \frac{1}{2} a\,\Delta t_{\mathrm{k}}^2\,, \text{ odkiaľ } \Delta t_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \frac{\Delta t_{\mathrm{m}}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 8{,}5\ \mathrm{s}$$

c) Koniec vlaku je od Pavla na začiatku vo vzdialenosti $s_{n+1} = (n+1-k)l$ a s rovnomerným zrýchlením a prejde okolo neho za čas

$$t_{\mathrm{n+1}} = \sqrt{\frac{2l}{a}}\,\sqrt{n-k+1} = \frac{\sqrt{n-k+1}}{\sqrt{m-k+1} - \sqrt{m-k}}\,\Delta t_{\mathrm{m}} \approx 24{,}0\ \mathrm{s}$$

Rýchlosť konca vlaku v mieste Pavla

$$v_{\mathrm{n}} = a\,t_{\mathrm{n+1}} = \sqrt{2a\,l}\,\sqrt{n+1-k} = \frac{2l}{\Delta t_{\mathrm{m}}}\left(\sqrt{m-k+1} - \sqrt{m-k}\right)\sqrt{n+1-k}\,.$$

Pre dané hodnoty $v_{10} \approx 16{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 60$ km/h.

Prechod n–tého vozňa vyjadríme rovnako ako v prípade m–tého vozňa (v časti a))

$$\Delta t_{\mathrm{n}} = t_{\mathrm{n+1}} - t_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{2l}{a}}\left(\sqrt{n-k+1} - \sqrt{n-k}\right) = \frac{\sqrt{n-k+1} - \sqrt{n-k}}{\sqrt{m-k+1} - \sqrt{m-k}}\,\Delta t_{\mathrm{m}}\,.$$

Pre dané hodnoty $\Delta t_{10} \approx 1{,}6$ s

3) Explózia modelu rakety

Riešenie:

a) Raketa by sa pohybovala zvislo nahor so zrýchlením $-g$

$$v = v_0 - g\,t\,.$$

V najvyššom bode je rýchlosť nulová a platí

$$0 = v_0 - g\,t_1\,,\ \text{odkiaľ}\ \ t_1 = \frac{v_0}{g} \approx 3{,}06\ \text{s.}$$

b) Určíme výšku rozdelenia a rýchlosť rakety tesne pred rozdelením

$$h_2 = v_0\,t_2 - \frac{1}{2}g\,t_2^2 \quad \text{a} \qquad v_2 = v_0 - g\,t_2\,,$$

pre dané hodnoty $h_2 \approx 44{,}3$ m, $v_2 \approx 5{,}48$ m·s^{-1}.

Tesne po rozdelení sa dolná čas pohybuje z výšky h_1 so začiatočnou rýchlosťou v_3. Pre výšku dopadu platí

$$h_\mathrm{d} = h_2 + v_3\,t_3 - \frac{1}{2}g\,t_3^2 = 0\,,$$

odkiaľ určíme rýchlosť

$$v_3 = \frac{1}{t_3}\left(\frac{1}{2}g\,t_3^2 - h_2\right) \quad \text{a po dosadení za } h_2$$

$$v_3 = \frac{1}{2}g\,t_3\left(1+\frac{t_2^2}{t_3^2}\right) - v_0\frac{t_2}{t_3} \approx -10{,}84\ \text{m·s}^{-1}.$$

Tesne po rozdelení sa dolná časť pohybuje smerom nadol.

c) Pri oddelení častí sa zachováva hybnosť sústavy. Určíme rýchlosť hornej časti tesne po rozdelení rakety

$$(m_1 + m_2)v_2 = m_1\,v_4 + m_2\,v_3\,,$$

odkiaľ $$v_4 = \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)(v_0 - g\,t_2) + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{h_2}{t_3} - \frac{1}{2}g\,t_3\right) \approx 54{,}53\ \text{m·s}^{-1}.$$

Horná časť pokračuje z bodu rozdelenia vo výške h_2 so začiatočnou rýchlosťou v_4. V okamihu dopadu na zem máme

$$h_\mathrm{d} = 0 = h_2 + v_4\,t_4 - \frac{1}{2}g\,t_4^2\,.$$ Kvadratickú rovnicu upravíme na tvar

$$t_4^2 - 2\frac{v_4}{g}t_4 - 2\frac{h_2}{g} = 0\,,$$ odkiaľ dostávame

$$t_4 = \frac{v_4}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_4}{g}\right)^2 + 2\frac{h_2}{g}}$$ - význam má znamienko + pre $t_4 > 0$.

Pre dané hodnoty $t_4 \approx 11{,}84$ s.

Pozn.: Možno použiť aj iný spôsob: za čas $v_4/g = 5{,}56$ s vystúpi ešte o 151,77 m, a potom z výšky (151,55 + 44,34) m voľným pádom spadne za čas 6,33 s, tzn. celkový čas (6,33 + 5,56) s = 11,89 s.

d) Pri uvoľnení pružiny sa zvýši kinetická energia sústavy

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}m_1\,v_4^2 + \frac{1}{2}m_2\,v_3^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2\,.$$

Pre dané a vypočítané hodnoty $E_\mathrm{p} \approx 796$ J.

4) Kužeľová zátka

Riešenie:

a) Na zátku pôsobí tiažová sila, ktorá zátku zatláča do otvoru

$$F_g = \frac{1}{3} S\,H\,\rho\,g\text{, kde } S = \frac{\pi\left(2d_o\right)^2}{4} \text{ a po úprave}$$

$$F_g = \frac{\pi}{3} d_o^2\,H\,\rho\,g \approx 0{,}28\ \text{N}.$$

Keď sa začne do nádoby napúšťať voda, začne na zátku pôsobiť vztlaková sila, ktorá rastie až kým voda nedosiahne podstavu kužeľa. Vztlaková sila napúšťaním vody narastá a dosiahne svojho maxima, keď hladina vody dosiahne podstavu zátky vo výške $\frac{H}{2}$ nad dnom nádoby. Uvažujme preto len prípad, keď je hladina na úrovni podstavy kužeľa, a teda vo vode sa nachádza zrezaný kužeľ s podstavami S a S_o a výškou $h_0 = H/2$. Keby voda pôsobila na celý povrch zrezaného kužeľa, bola by vztlaková sila rovná tiaži vody vytlačenej objemom telesa. Na spodnú podstavu S_o však voda vztlakom nepôsobí, a preto tlakovú silu vody treba odpočítať. Objem zrezaného kužeľa

$$V_v = \frac{1}{3} S\,H - \frac{1}{3} S_o\left(H - h_0\right)\text{, kde } S_o = \tfrac{1}{4} S \text{ a } h_0 = \tfrac{1}{2} H\text{, takže } V_v = \frac{7}{24} S\,H\,.$$

Vztlaková sila

$$F_{v0} = V_v\,\rho_v\,g - S_o\,h_o\,\rho_v\,g = \frac{1}{6} S\,H\,\rho_v\,g = \frac{\pi}{6} d_o^2\,H\,\rho_v\,g \approx 0{,}23\ \text{N}.$$

Keďže $F_{v0} < F_g$, zátka zostane tesná.
Pri zväčšovaní výšky vody bude vztlaková sila naďalej klesať, zátka zostane tesná i pri vyššej hladine vody.

b) Pri výške hladiny h_1 vypočítame vztlakovú silu pôsobiacu na zátku ako

$$F_{v1} = V_v\,\rho_v\,g - S_o\,h_1\,\rho_v\,g = \frac{\pi}{4}\left(\frac{7}{6} H - h_1\right) d_o^2\,\rho_v\,g \approx -1{,}33\ \text{N}.$$

Opačné znamienko znamená, že sila pôsobí nadol a spočítava sa s tiažovou silou. Na kompenzáciu celkovej sily je potrebná sila F smerom nahor

$$F = F_g - F_{v1} = \left[\frac{1}{3}\rho + \frac{1}{4}\left(\frac{h_1}{H} - \frac{7}{6}\right)\rho_v\right]\pi\,d_o^2\,H\,g \approx 1{,}61\ \text{N}.$$

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (2, 3, 4), Kamil Bystrický (1)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023