

**64. ročník Fyzikálnej olympiády**  
**v školskom roku 2022/2023**  
*Celoštátne kolo kategórie A*  
*Prešov 13. – 16. apríla 2023*

**Zadanie experimentálnej úlohy**

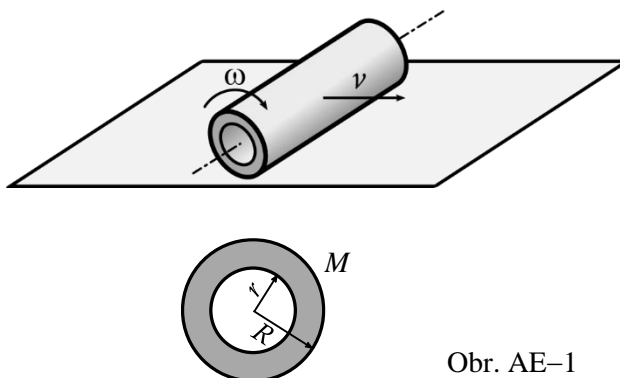
**Meranie valivého odporu telies - „The rolling stones“**

*Teoretický úvod*

Valivý pohyb telesa s rotačnou symetriou možno považovať za superpozíciu pohybu posuvného (translácie) a otáčavého (rotácie). Kinetickú energiu vyjadruje vzťah

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2, \quad (1)$$

kde prvý výraz predstavuje kinetickú energiu posuvného pohybu telesa,  $m$  je hmotnosť telesa a  $v_T$  rýchlosť pohybu ťažiska, a druhý výraz kinetickú energiu otáčavého pohybu telesa okolo osi prechádzajúcej ťažiskom,  $I_T$  je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom a  $\omega$  uhlová rýchlosť otáčania. Pri valivom pohybe je os otáčania osou rotačnej symetrie telesa, obr. AE-1.



Obr. AE-1

Moment zotrvačnosti vyjadruje vzťah

$$I = \int_V \rho r^2 dV,$$

kde  $\rho$  je hustota telesa,  $dV$  objemový element telesa a  $r$  vzdialenosť elementu od osi otáčania. Pre homogénny dutý valec vyjadruje moment zotrvačnosti vzhľadom na os rotačnej symetrie vzťah

$$I_T = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2), \quad (2)$$

kde  $M$  je hmotnosť valca,  $R$  vonkajší a  $r$  vnútorný polomer, obr. AE-1.

Ak valec zavesíme tak, aby mohol kmitať okolo osi rovnobežnej s osou valca, dobu kmitu takého kyvadla určuje vzťah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgx}}, \quad (3)$$

kde  $x$  je vzdialenosť ťažiska valca od osi kmitania kyvadla,  $g$  tiažové zrýchlenie a moment zotrvačnosti (podľa Steinerovej vety)

$$I = I_T + Mx^2. \quad (4)$$

Pri valivom pohybe pôsobí na teleso valivý odpor vyjadrený silou valivého odporu

$$F_v = \frac{\xi}{R} F_N, \quad (5)$$

kde  $\xi$  je koeficient valivého odporu a  $F_N$  tlaková sila podložky.

Na valiaci sa valec pôsobí odpor vzduchu, ktorý opisuje sila aerodynamického odporu

$$F_o = \frac{1}{2} C_x S_x \rho_v v^2, \quad (6)$$

kde  $C_x = 0,68$  (pre pomer dĺžky a priemeru  $L/(2R) \approx 2$ ) je koeficient aerodynamického odporu,  $S_x$  obsah pričného prierezu (pre valec  $S_x = 2LR$ ),  $\rho_v \approx 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  hustota vzduchu v miestnosti,  $v$  rýchlosť postupného pohybu valca.

### Experiment

#### 1. úloha: Meranie momentu zotrvačnosti telesa

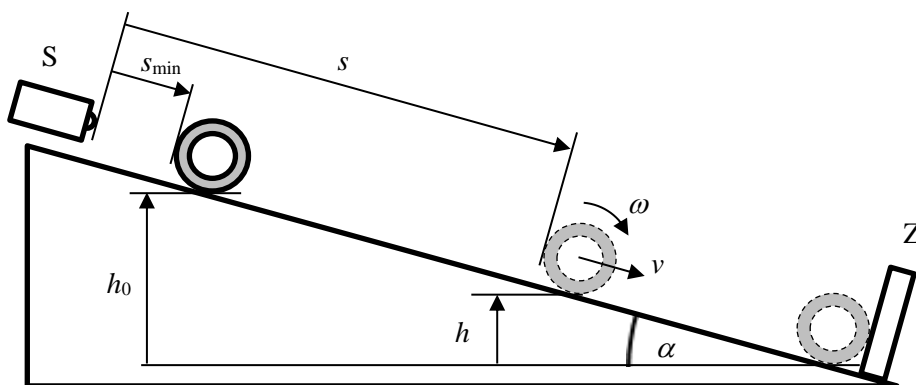
Určte moment zotrvačnosti  $I_T$  dutého valca vzhľadom na jeho os rotačnej symetrie dvomi spôsobmi, výsledky porovnajte a prípadné rozdiely zdôvodnite.

- Zmerajte potrebné veličiny a vypočítajte moment zotrvačnosti pomocou vzťahu (2).
- Valec zaveste na hranu tenkého pliešku tak, aby sa mohol kývať okolo osi rovnobežnej s jeho osou rotačnej symetrie. Zmerajte dobu kmitu  $T$  takto vytvoreného kyvadla a ďalšie potrebné veličiny pre výpočet potrebných momentov zotrvačnosti podľa vzťahov (3) a (4). Pozn.: Na meranie času použite počítačový program „stopky“. Gravitačné zrýchlenie  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

#### 2. úloha: Určenie zrýchlenia telesa

Pripravte si naklonenú rovinu podľa obr. AE-2 s plastovým povrchom. Na dolnom konci je zarážka Z, na hornom je umiestnený senzor S, ktorý zaznamenáva vzdialenosti  $s_i$  pre časy  $t_i$  s nastaveným konštantným časovým intervalom  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ . Predpokladajte, že postupný pohyb valca je rovnomerne zrýchlený a opísaný vzťahom

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (7)$$



Obr. AE-2

- Nastavte naklonenú rovinu tak, aby zvierala s vodorovnou rovinou uhol  $\alpha = 4^\circ$ .
- Z horného konca naklonenej roviny púšťajte valec a nechajte ho pohybovať sa valivým pohybom k dolnému okraju. Pomocou senzora zaznamenajte závislosť vzdialenosti  $s$  od času  $t$ . Meranie opakujte 4× (keďže povrch valca nemusí byť dokonale valcový, odporúča sa zvoliť začiatočné natočenia valca  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  a  $270^\circ$ ). Návod na meranie je uvedený nižšie.
- Namerané hodnoty  $t_i$ ,  $s_i$  vložte do pripraveného hárku programu EXCEL a s použitím nástroja „Riešiteľ“ nájdite regresnú závislosť  $s(t)$  v tvare (7) metódou najmenších štvorcov, a z nej určte hodnoty zrýchlenia  $a_n$  valca pre každé zo štyroch meraní  $n = 1$  až 4 a priemernú hodnotu  $a$  z tejto

štvorice výsledkov. Informácie k spracovaniu výsledkov s použitím pripraveného hárku EXCEL sú uvedené v bode 3 Návodu (*Fitovanie kvadratickej závislosti*).

### **3. úloha: Určenie koeficientu valivého odporu z pohybu po naklonenej rovine**

- Určte rýchlosť  $v_n$  a kinetickú energiu  $E_{kn}$  valca tesne pred nárazom do zarážky a rozdiel  $\Delta E_p$  potenciálnej energie medzi začiatočnou a konečnou polohou valca pre každé zo štyroch meraní. Určte priemernú hodnotu rýchlosti  $v_T$  a priemernú hodnotu rozdielu ( $E_{kn} - \Delta E_p$ ), a tento rozdiel fyzikálne zdôvodnite.
- Určte aerodynamický odpor  $F_{ok}$  valca pri rýchlosti  $v_T$  a ukážte, že jeho vplyv na pohyb valca je zanedbateľne malý v porovnaní s pohybovou zložkou tiažovej sily.
- S použitím rozdielu  $\Delta E_p - E_k$  určte prácu  $W_{vA}$  sily valivého odporu a koeficient  $\zeta_A$  valivého odporu. Uvedeným spôsobom určte prácu  $W_{vB}$  sily valivého odporu a koeficient  $\zeta_B$  valivého odporu pre iný povrch naklonenej roviny.
- Ukážte, či je veľkosť sily aerodynamického odporu tesne pred nárazom do zarážky zanedbateľne malá v porovnaní so silou valivého odporu pre oba materiály naklonenej roviny.
- Numerickou integráciou v hárku EXCEL vyčíslite prácu síl odporu vzduchu počas pohybu telesa po naklonenej rovine v prípade prvého povrchu  $W_0 = \sum_i F_{0i} \cdot \Delta s_i$ , kde  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ,  $i=1,2,\dots$

### **4. úloha: Určenie závislosti času pohybu telesa od polohy bariéry**

- Z merania časovej závislosti vzdialenosti telesa od senzora určte celkový čas pohybu telesa po naklonenej rovine pre rôzne vzdialenosti bariéry od senzora zmenou polohy bariéry.
- Na milimetrový papier zostrojte graf závislosti celkového času pohybu telesa od prejdenej dráhy telesa.
- Na základe hodnôt  $a$ ,  $v_0$  a  $s_0$  získaných v úlohe 2, vyjadrite závislosť času pohybu telesa ako funkciu prejdenej dráhy. Do grafu z časti b) zaznačte aj túto závislosť. Oba grafy porovnajte a urobte diskusiu.

Všetky namerané a vypočítané hodnoty ako i odpovede na otázky zapíšte do priloženej šablóny protokolu. Na ďalšie voľné listy si môžete zapisovať pomocné výpočty, obsah týchto listov sa však nehodnotí. Pre prípadnú kontrolu údajov, ponechajte na ploche počítača všetky relevantné súbory, ktoré boli použité pri riešení jednotlivých úloh.

Pomôcky:

Naklonená rovina s konzolou, valcové teleso známej hmotnosti, klátiky a klíny na podkladanie senzora a na uvoľňovanie valcového telesa, posuvná bariéra, posuvné meradlo, dĺžkové meradlo, stopky (počítačový program), merací systém uLAB so senzorom vzdialenosti, počítač s internetovým prehliadačom pre ovládanie meracieho systému a využitý na spracovanie nameraných údajov pomocou programu EXCEL.

Návody:

1. Počítačový program „stopky“ nájdete ako odkaz na pracovnej ploche počítača.

Ovládanie programu (obr. AE-3):

- spúšťanie časomiere (tlačidlo *Start*)
- zastavenie časomiere (tlačidlo *Stop*, na ktoré sa zmení tlačidlo *Start* po spustení merania)
- vynulovanie časomiere (tlačidlo *Reset*)



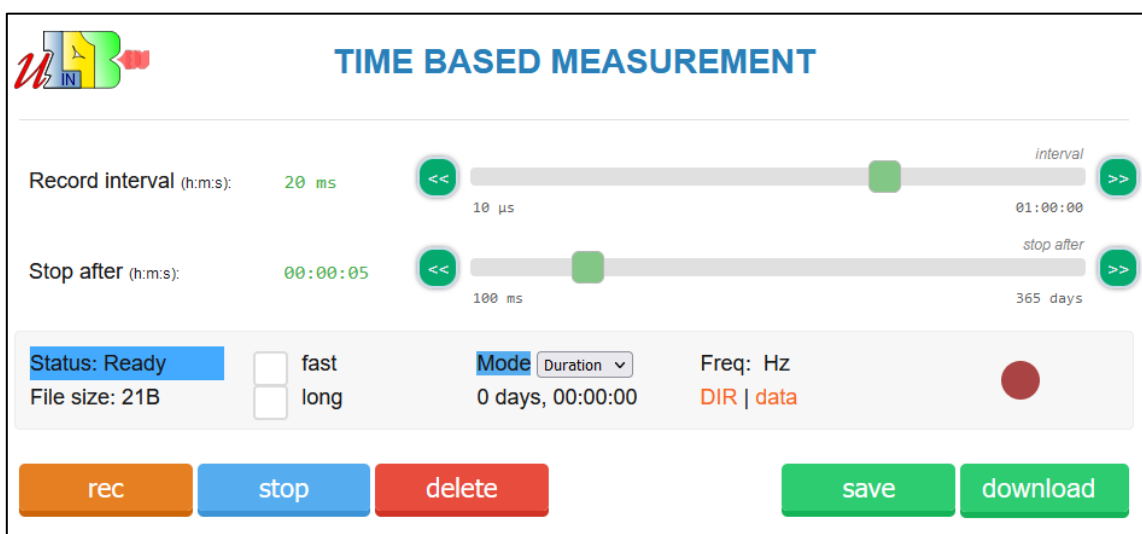
Obr. AE-3



Obr. AE-4

2. Použitie meracieho systému uLAB (obr. AE-4), vyvinutého na Katedre fyziky, matematiky a techniky FHPV PU v Prešove.

Základom meracieho systému je centrálna jednotka napájaná pomocou micro-USB/USB-C kábla z USB portu počítača, alebo iného zdroja energie. K nej sa pripájajú senzory pomocou USB-A kábla, obr. AE-4. K systému sa možno pripojiť ľubovoľným zariadením, ktorý je vybavený WiFi technológiou a internetovým prehliadačom. Po pripojení zariadenia k WiFi sieti (prihlasovacie údaje sú zobrazené na LCD) je rozhranie meracieho systému dostupné ako stránka v internetovom prehliadači. Adresa stránky je <http://192.168.4.1> a je dostupná aj ako link na pracovnej ploche. Meracie rozhranie časových závislostí fyzikálnych veličín je dostupné z rozhrania hlavného menu, pričom je potrebné zvoliť: „uLAB → Time based measurement“. V tomto rozhraní je zobrazených niekoľko panelov, pričom parametre merania (*Record interval* – interval merania hodnôt a *Stop after* – dĺžka merania) je potrebné nastaviť podľa obr. AE-5.



Obr. AE-5

Ako senzor je v našom prípade využitý tzv. laserový ToF senzor<sup>1</sup>. Na meranie vzdialenosti má vplyv koeficient reflexie povrchov telies a čiastočne aj podložky, preto pred meraním je potrebné nastaviť sklon senzora tak, aby meral správnu hodnotu zistenú dĺžkovým meradlom. Pri uvoľňovaní valca použite oporné teleso (drevený klátik). Úlohy realizujte tak, aby senzorom meraná vzdialenosť od valca bola maximálne 0,5 m.

Meranie sa spúšťa tlačidlom *rec*. Ukončiť meranie pred uplynutím limitu je možné tlačidlom *stop* a vymazať dáta (neuložené tlačidlom *save*) možno tlačidlom *delete*. Uložiť súbor je možné stlačením tlačidla *save*. Tento súbor sa uloží pod názvom času uloženia YYYYMMDDHHMMSS v priečinku *data* (nad tlačidlom *save*). Z tohto priečinka je možné všetky súbory stiahnuť do počítača a importovať v programe Excel (napríklad dvojklikom na súbor). Ukladanie slúži na rozdelenie jednotlivých meraní do súborov, čo zjednodušuje orientáciu v nameraných dátach. Bez uloženia sú aktuálne namerané dáta dostupné po stlačení tlačidla *download*. Pri rovnakých podmienkach sa odporúča do jedného súboru nahráť viac meraní. V takom súbore sú jednotlivé merania oddelené hlavičkou tabuľky.

### 3. Fitovanie kvadratickej závislosti.

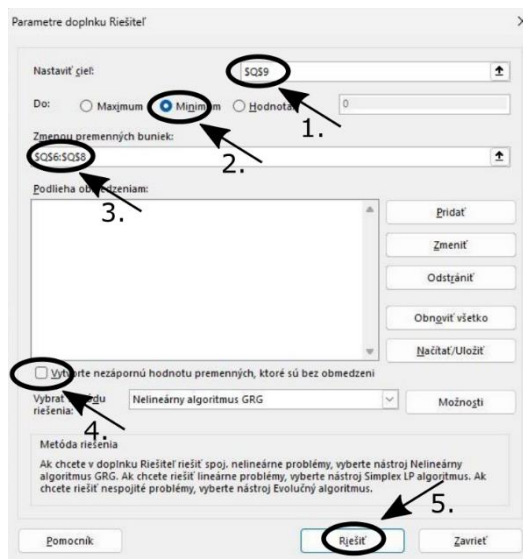
- a) Namerané hodnoty závislosti  $s(t)$  importujte do pripraveného EXCEL hárku tak, že do pripravených polí (zvýraznené zelenou farbou) vložíte namerané hodnoty zo súboru stiahnutého zo zariadenia.
- b) Do buniek Q1 a Q2 (oranžová farba), zapíšte časy začiatku a konca pohybu zistené z náhľadu grafu (pri určovaní časov môžete využiť funkciu, ktorá zobrazí súradnice bodu grafu pri presunutí kurzora myši na daný bod). Týmto krokom vyberiete časový interval, pre ktorý je spočítaná bunka Q9 (viď bod 3c nižšie). V prípade získania nereálnych koeficientov, zvolený interval aktualizujte.
- c) S pomocou excelovského modulu *Riešiteľ*<sup>1</sup> aplikujete numerickú metódu najmenších štvorcov (kroky 1 a 2, obr. AE-6). Tento nástroj umožňuje určiť fitované koeficienty  $a$ ,  $v_0$  a  $s_0$  funkcie (7) minimalizáciou súčtu štvorcov vykonaním nasledujúcich krokov (obr. AE-7):
  - o krok 1: bunku Q9 si nastavíte ako cieľ (táto bunka predstavuje súčet štvorcov rozdielov nameranej závislosti a fitovanej funkcie v každom čase vybraného intervalu z bodu b)
  - o krok 2: nastavíte si hľadanie minima hodnoty Q9 zmenou buniek z kroku 3
  - o krok 3: nastavíte si bunky Q6 - Q8, ktoré predstavujú koeficienty  $a$ ,  $v_0$  a  $s_0$  fitovanej funkcie
  - o krok 4: pred výpočtom je potrebné zaškrtnúť prípustnosť záporných koeficientov
  - o krok 5: spustenie modulu *Riešiteľ*<sup>1</sup> a následné potvrdenie nájdených hodnôt

---

<sup>1</sup> Princíp ToF (Time of Flight) merania vzdialenosti je založený na meraní času, ktorý uplynie od vyslania laserového lúča jeho zdrojom až po detekciu lúča odrazeného od meraného telesa. Vychádzajúc z konštrukcie senzora je minimálna meraná vzdialenosť  $s_{\min} = 4 \text{ cm}$



Obr. AE-6



Obr. AE-7

64. ročník Fyzikálnej olympiády – Celoštátneho kola kategórie A - experimentálna úloha

Autor úlohy:	Sergej Il'kovič
Recenzia:	Ivo Čáp, Ľubomír Mucha
Preklad do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakčná úprava:	Sergej Il'kovič, Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády NIVAM - Národný inštitút vzdelávania a mládeže 2023