64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória B

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Valček v žľabe

Riešenie:

a) Označíme φ výchylku ťažiska valčeka okolo osi žľabu. Potenciálna energia

$$E_\mathrm{p} = m g (R-r)(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2} m g (R-r)\varphi^2 = \frac{1}{2} k^* \varphi^2 . \qquad (1)$$

Kinetická energia

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 , \qquad (2)$$

kde $v = \omega r = (R-r)\dot{\varphi}$, kde v je rýchlosť pohybu ťažiska valčeka, ω uhlová rýchlosť rotácie valčeka a $\dot{\varphi}$ časová zmena (časová derivácia – označenie bodkou nad veličinou) uhlovej výchylky φ

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\, \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m^* \dot{\varphi}^2 . \qquad (3)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} \approx 0{,}74 \text{ s.}$$

Pozn.: K rovnakému výsledku možno dospieť aj iným spôsobom, napr. z pohybovej rovnice.

b) Pôsobí valivý odpor

$$F = \frac{\xi}{r} F_\mathrm{n} ,$$

kde F_n je tlaková sila medzi valčekom a žľabom pre malý uhol vychýlenia

$$F_\mathrm{n} = m g \cos\varphi + m \frac{v^2}{R-r} \approx m g + m \frac{v^2}{R-r} .$$

Keby nepôsobil valivý odpor, bola by kinetická energia valčeka rovná rozdielu potenciálnej energie medzi začiatočnou a aktuálnou polohou, v skutočnosti je ale hodnota menšia o prácu odporovej sily

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2 < \frac{1}{2} m g (R-r)\left(\varphi_0^2 - \varphi^2\right) .$$

Pre druhý člen tlakovej sily dostávame

$$m \frac{v^2}{R-r} < \frac{2}{3} m g \left(\varphi_0^2 - \varphi^2\right) \le \frac{2}{3} \varphi_0^2 \, m g \text{, pre } \varphi_0 = 8{,}7\times10^{-2} \text{ rad } (\approx 5°) \text{ je } \frac{2}{3}\varphi_0^2 \approx 5{,}1\times10^{-3}.$$

Druhý člen je pre malé uhly φ vychýlenia zanedbateľne malý, a teda $F_\mathrm{n} \approx m g$.

Práca $W = F s = F (s_1 + s_2) = F (R - r) (\varphi_1 + \varphi_2)$,

kde $s_1 + s_2$ je dráha ťažiska medzi krajnými polohami valčeka.

Rozdiel potenciálnej energie v krajných polohách je rovný práci sily valivého odporu

$$\frac{1}{2} m g (R-r)\varphi_1^2 - \frac{1}{2} m g (R-r)\varphi_2^2 = \frac{\xi}{r} m g (R-r)(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Odkiaľ pokles výchylky pri jednom kyve ($T/2$)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{2\xi}{r} \approx 3{,}0\times10^{-3}\ \text{rad} \approx 0{,}17°.$$

Vidíme, že pokles výchylky nezávisí od začiatočnej výchylky.

Keď valček zastane v krajnej polohe, začne sa pohybovať nazad, ak je zložka tiažovej sily väčšia ako odporová sila

$\frac{\xi}{r} m\,g < m\,g \sin\varphi$, odkiaľ dostávame medzný uhol $\sin\varphi_\text{m} \approx \varphi_\text{m} = \frac{\xi}{r} \approx 1{,}5\times10^{-3} \approx 0{,}09°$.

Počet kyvov valčeka

$$n = \frac{\varphi_0 - \varphi_\text{m}}{\Delta\varphi} = \frac{r\left(\varphi_0 - \varphi_\text{m}\right)}{2\xi} \approx 28{,}6 \approx 28\ \text{kyvov},$$

tzn. počet kmitov $N = 14$.

2) Kondenzátory

Riešenie:

Kapacity kapacitorov sú

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \text{a} \quad C_2 = \varepsilon_0\,\varepsilon_{\text{r}2} \frac{S}{d}\,. \tag{1}$$

a) Ak sú prvé dva kapacitory zapojené do série, po pripojení na zdroj je na oboch rovnaký náboj Q_1 a platí

$$U_0 = U_1 + U_2 \quad \text{a} \quad Q = C_1 U_1 = C_2 U_2\,. \tag{2}$$

Určíme napätia na kapacitoroch

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0 = E_1\,d \quad \text{a} \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0 = E_2\,d\,. \tag{3 a,b}$$

Dosadíme (*) a (1) do druhej rovnice, t.j. (3 b)

$$\frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d} + \varepsilon_0\,\varepsilon_{r0}\left(1 + \frac{E_2}{E_0}\right)\frac{S}{d}} U_0 = E_2\,d \tag{4}$$

a upravíme na kvadratickú rovnicu pre E_2

$$E_2^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{r0}}\right) E_0 E_2 - \frac{U_0}{d}\,\frac{E_0}{\varepsilon_{r0}} = 0$$

Riešenie rovnice

$$E_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{r0}}\right) E_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{r0}}\right)^2 E_0^2 + \frac{U_0}{d}\,\frac{E_0}{\varepsilon_{r0}}}\,.$$

Fyzikálny zmysel má pre $E_2 > 0$ znamienko (+), a teda

$$U_2 = E_2\,d = \frac{1 + \varepsilon_{r0}}{2\varepsilon_{r0}} E_0\,d \left(\sqrt{1 + \frac{4U_0}{d\,E_0}\,\frac{\varepsilon_{r0}}{\left(1 + \varepsilon_{r0}\right)^2}} - 1\right)$$

a $$U_1 = U_0 - U_2 = U_0 - \frac{1 + \varepsilon_{r0}}{2\varepsilon_{r0}} E_0\,d \left(\sqrt{1 + \frac{4U_0}{d\,E_0}\,\frac{\varepsilon_{r0}}{\left(1 + \varepsilon_{r0}\right)^2}} - 1\right).$$

Pre dané hodnoty $U_2 \approx 3{,}89$ V, $U_1 \approx 8{,}11$ V.

b) Náboj na kapacitoroch je

$$Q = Q_1 = Q_2 = C_1 U_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\left[U_0 - \frac{1+\varepsilon_{r0}}{2\varepsilon_{r0}} E_0\, d\left(\sqrt{1+\frac{4U_0}{d\,E_0}\frac{\varepsilon_{r0}}{\left(1+\varepsilon_{r0}\right)^2}} - 1\right)\right] \approx 7{,}18\ \text{nC}.$$

Práca zdroja s napätím U_0 pri dodaní náboja Q je

$$W = Q\,U_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\left[U_0 - \frac{1+\varepsilon_{r0}}{2\varepsilon_{r0}} E_0\, d\left(\sqrt{1+\frac{4U_0}{d\,E_0}\frac{\varepsilon_{r0}}{\left(1+\varepsilon_{r0}\right)^2}} - 1\right)\right] U_0 \approx 86{,}1\ \text{nJ}.$$

c) Energia nabitých kondenzátorov

$$E = \frac{1}{2} Q U_1 + \frac{1}{2} Q U_2 = \frac{1}{2} Q\,U_0 = \frac{W}{2} \approx 43{,}1\ \text{nJ}.$$

Ako vidíme energia nabitých kapacitorov je polovica práce vykonanej zdrojom. Kde sa stratila druhá polovica vykonanej práce zdroja? – Pri nabíjaní prechádza vodičmi obvodu prúd, a tak dochádza k Joulovým stratám. Aj keď sa to zdá nepravdepodobné, lebo vodiče často považujeme za ideálne, polovica vykonanej práce zdroja sa uvoľní počas nabíjania ako teplo vo vodičoch.

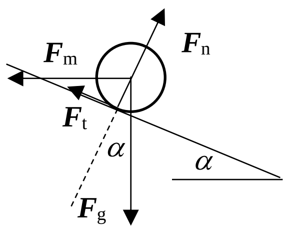
3) Valec na šikmých koľajničkách v magnetickom poli

Riešenie :

a) Obr. RB–1.

Na valček pôsobia sily: tiažová $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,\boldsymbol{g}$, tlaková sila podložky $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$, sila statického trenia $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ (nepreśmykuje) a magnetická sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ kolmo na $\boldsymbol{B}$ (vodorovná) s veľkosťou $F_\mathrm{m} = B\,I\,d$, kde I je prúd prechádzajúci obvodom.

Keď sa valček pohybuje, indukuje sa medzi kontaktmi s koľajničkami prúd



Obr. RB–1

$$I = \frac{1}{R} U_\mathrm{ind} = \frac{1}{R} B\,d\,v\cos\alpha\ ,$$

kde $v\cos\alpha$ je vodorovná zložka rýchlosti (kolmá na smer magnetickej indukcie) a U_ind indukované napätie vo vodiči v magnetickom poli.

Magnetická sila je tak

$$F_\mathrm{m} = \frac{1}{R} B^2 d^2 v\cos\alpha\ .$$

Tlaková sila je

$$F_\mathrm{n} = m\,g\cos\alpha + F_\mathrm{m}\sin\alpha$$

Sila trenia

$F_\mathrm{t} \le f\ F_\mathrm{n}$ - podmienka statického trenia.

b) Valivý pohyb valčeka sa skladá z pohybu posuvného a pohybu otáčavého. Pohybové rovnice majú tvar

$$m\,a = m\,g\sin\alpha - F_\mathrm{m}\cos\alpha - F_\mathrm{t}$$

$$J\,\varepsilon = F_\mathrm{t}\,r\ ,$$

pričom pre valivý pohyb platí $a = r\,\varepsilon$, kde ε je uhlové zrýchlenie.

Zrýchlenie pohybu je potom

$$a = \frac{2}{3}\left(g\sin\alpha - \frac{F_\mathrm{m}}{m}\cos\alpha \right) = \frac{2}{3}\left(g\sin\alpha - \frac{B^2 d^2}{mR} v\cos^2\alpha \right).$$

Zrýchlenie sa zmenšuje s narastaním rýchlosti (pohyb nerovnomerne zrýchlený) až nastane ustálený stav s nulovým zrýchlením (rovnomerný pohyb) a rýchlosťou

$$v_0 = \frac{m g R \sin\alpha}{B^2 d^2 \cos^2\alpha} \approx 0{,}61\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

c) Začiatočné zrýchlenie (pre $v = 0$) je

$$a_0 = \frac{2}{3} g\sin\alpha \approx 1{,}14\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

S týmto zrýchlením by valček dosiahol rýchlosť v_0 za dobu

$$\tau = \frac{v_0}{a_0} = \frac{3m R}{2B^2 d^2 \cos^2\alpha} \approx 0{,}54\ \mathrm{s}.$$

Za tento čas by prešiel rovnomerne zrýchleným pohybom dráhu

$$s_0 = \frac{1}{2} a_0 \tau^2 = \frac{3}{4} g\sin\alpha \left(\frac{m R}{B^2 d^2 \cos^2\alpha} \right)^2 \approx 16{,}3\ \mathrm{cm}.$$

Pozn.: V skutočnosti narastá rýchlosť exponenciálne a τ sa nazýva časová konštanta deja a za tento čas dosiahne rýchlosť veľkosť $(1 - \mathrm{e}^{-1})\, v_0 \approx 0{,}63\, v_0$, za čas 2τ hodnotu $(1 - \mathrm{e}^{-2})\, v_0 \approx 0{,}86\, v_0$, atď., pričom $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ je Eulerovo číslo (základ prirodzených logaritmov).

4) Kyvadlo a šošovka

Riešenie:

a) Pre zobrazenie žiarovky platí zobrazovacia rovnica

$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}$, kde $a_1 = H - h$ je predmetová vzdialenosť a $a_2 = h$ obrazová vzdialenosť.

Po dosadení dostávame rovnicu

$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{H-h} + \dfrac{1}{h}$, po úprave $\quad h^2 - H h + f H = 0$.

riešenie rovnice

$$h = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - f H}\ .$$

Reálne riešenie existuje iba ak

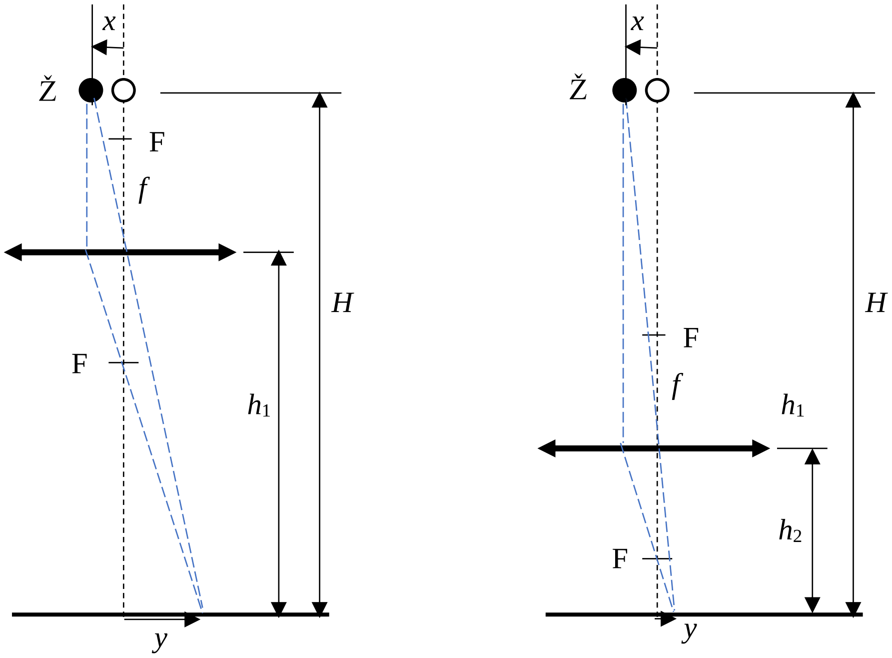
$$H \geq 4f\ .$$

Je zrejmé, že šošovkou s ohniskovou vzdialenosťou $f_2 = 20$ cm sa obraz zaostriť nedá.
V prípade druhej šošovky je obraz zaostrený pre $h_1 \approx 48{,}2$ cm alebo $h_2 \approx 21{,}8$ cm.

b) Obr. RB–2.

c) Perióda matematického kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 3{,}17\ \mathrm{s}.$$



Obr. RB–2

d) Rýchlosť žiarovky pri prechode rovnovážnou polohou určíme zo zákona zachovania mechanickej energie

$$m\,g\,z_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m\,v_{\mathrm{m}}^2 ,$$

kde z_{m} je maximálna zmena výšky žiarovky pri vychýlení, ktorú určíme zo vzťahu

$$x_{\mathrm{m}}^2 + \left(L - z_{\mathrm{m}}\right)^2 = L^2 \text{, odkiaľ} \quad z_{\mathrm{m}} = L - \sqrt{L^2 - x_{\mathrm{m}}^2} \text{, a teda}$$

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{2\,g\,z_{\mathrm{m}}} = \sqrt{2\,g\left(L - \sqrt{L^2 - x_{\mathrm{m}}^2}\right)} \approx 3{,}96\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}.$$

Z obr. RB–2 vidíme, že pri výchylke x žiarovky sa obraz vychýli o y, pričom platí $x / (H - h) = y / h$, a teda rýchlosť pohybu obrazu

$$v_{\mathrm{Om}} = \frac{h}{H - h} v_{\mathrm{m}} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4 f H}}{H \mp \sqrt{H^2 - 4 f H}} \sqrt{2\,g\left(L - \sqrt{L^2 - x_{\mathrm{m}}^2}\right)} .$$

Pre h_1 (horné znamienka) $v_{\mathrm{Om1}} \approx 8{,}78\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$,
pre h_2 (dolné znamienka) $v_{\mathrm{Om2}} \approx 1{,}79\ \mathrm{cm^{-1}}$.
V oboch prípadoch sa obraz pohybuje v opačnom smere ako žiarovka.

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie B*
Autori návrhov úloh: Ivo Čáp (1, 3), Ľubomír Konrád (2, 4)
Recenzia: Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka: Aba Teleki
Redakcia: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023