64. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2022/2023

Kategória C

Krajské kolo – riešenie úloh

1) Šikmý vrh

Riešenie:

Pohyb loptičky predstavuje šikmý vrh. Pre pohyb od chlapca k múru platia vzťahy pre výšku y a vodorovnú vzdialenosť x a zložky vektora rýchlosti

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = h + v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2\,, \qquad (1, 2)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g\, t\,. \qquad (3, 4)$$

a) Ak sa má loptička vrátiť do miesta vrhu, musí trajektória po odraze kopírovať trajektóriu pred odrazom, čo vyžaduje kolmý dopad loptičky na múr. Pre bod dopadu na múr tak platí

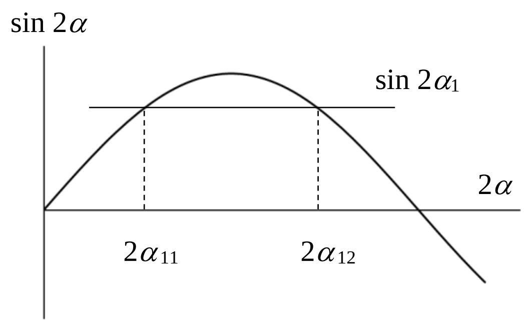
$$d_1 = v_0\, t_1 \cos\alpha_1 \qquad v_{y1} = 0 = v_0 \sin\alpha_1 - g\, t_1\,. \qquad (4, 5)$$

Z rovnice (5) vyjadríme čas pohybu loptičky

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \sin\alpha_1\,.$$

Čas dosadíme do rovnice (4) a určíme uhol α_1

$$d_1 = \frac{v_0^2}{2g} 2\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_1\,,$$



odkiaľ máme dve riešenia (obrázok)

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 g\, d_1}{v_0^2} \approx 35{,}2°$$

a $\alpha_{12} = 90° - \alpha_{11} \approx 54{,}8°$.

Pre čas t_1 určíme výšku bodu odrazu

$$y_{\mathrm{O}} = h + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_1\,.$$

Pre uhol α_{11} je výška odrazu $h_{11} \approx 3{,}69$ m,
pre uhol α_{12} je výška odrazu $h_{12} \approx 5{,}41$ m.

b) Keďže sa pri pružnom odraze loptička pohybuje nazad, ako keby pokračovala zrkadlovo vo voľnom priestore ďalej, možno trajektóriu uvažovať ako parabolickú s dopadom vo vzdialenosti $2d_2$ a výškou dopadu na zem $y_{\mathrm{d}} = 0$.

$$y_{\mathrm{d}} = h + v_0\, t_{\mathrm{d}} \sin\alpha_2 - \frac{1}{2} g\, t_{\mathrm{d}}^2 = 0 \quad \text{a} \quad x_{\mathrm{d}} = v_0\, t_{\mathrm{d}} \cos\alpha_2 = 2 d_2\,. \qquad (6, 7)$$

Čas dopadu na zem

$$t_{\mathrm{d}} = \frac{2 d_2}{v_0 \cos\alpha_2}$$

a dosadením do (6) dostávame kvadratickú rovnicu pre vzdialenosť d_2

$$d_2^2 - 2\, d_2 \frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha_2 \tan \alpha_2 - h \frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha_2 = 0 .$$

Jej riešenie je

$$d_2 = \frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha_2 \tan \alpha_2 \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha_2 \tan \alpha_2 \right)^2 + h \frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha_2}$$

Fyzikálny zmysel má iba kladné riešenie, tzn. znamienko +.
Po úprave vyjadríme riešenie v tvare

$$d_2 = \frac{v_0^2}{2g} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha_2}} \right) \approx 5{,}74 \text{ m.}$$

2) Pohyb s trením

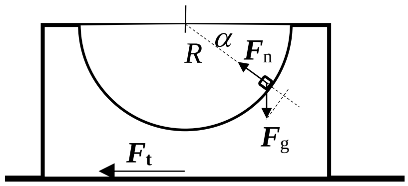
Riešenie:

Na klesajúce teliesko pôsobí tiažová sila $F_\mathrm{g} = m\,g$ a tlaková sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ misky. Ak sa miska nepohybuje, teliesko sa pohybuje po kružnici, pričom jeho dostredivé zrýchlenie je

$$\frac{v^2}{R} = \frac{1}{m} \left(F_\mathrm{n} - F_\mathrm{g} \sin \alpha \right).$$

Ak neuvažujeme trenie medzi telieskom a miskou, zachováva sa mechanická energia

$$\frac{1}{2} m v^2 = m\, g\, R\, \sin \alpha .$$



Obr. RC–2

Z rovníc určíme tlakovú silu medzi telieskom a podložkou

$$F_\mathrm{n} = 3\, m\, g\, \sin \alpha .$$

Rovnako veľkou silou opačného smeru pôsobí teliesko na misku.
Tlaková sila medzi miskou a podložkou je tak

$$F_\mathrm{N} = M\, g + F_\mathrm{n} \sin \alpha = \left(M + 3\, m \sin^2 \alpha \right) g .$$

Tangenciálna zložka sily medzi miskou a podložkou

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cos \alpha = 3\, m\, g \sin \alpha \cos \alpha .$$

Trenie zostáva statické, ak platí $F_\mathrm{t} \le f\, F_\mathrm{N}$.
Pre medznú hodnotu sily statického trenia pri dosiahnutí uhlu α_1 dostávame

$$3\, m\, g \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = f \left(M + 3\, m \sin^2 \alpha_1 \right) g ,$$

odkiaľ určíme faktor trenia

$$f = \frac{3\, m\, g \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\left(M + 3\, m \sin^2 \alpha_1 \right) g} = \frac{3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{k + 3 \sin^2 \alpha_1} \approx 0{,}032.$$

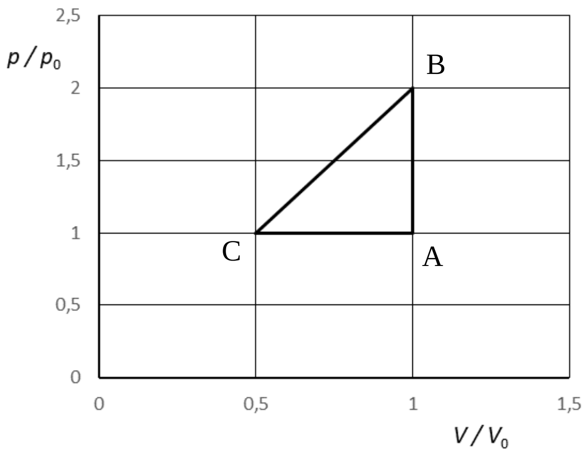
3) Termodynamický dej

Riešenie:

a) Hmotnosť m hélia je konštantná, preto premennú c vieme pomocou premennej b vyjadriť nasledovne

$$b = \frac{m/V}{m/V_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{1}{c}.$$

Dej AC je izobarický, AB izochorický. Keďže pri konštantnej hmotnosti je hustota nepriamoúmerná objemu, pre dej BC platí $a/c = k$, kde $c = V/V_0$ je relatívna zmena objemu. Grafom deja BC je potom úsečka prechádzajúca začiatkom súradníc. Je zrejmé, že stav A má polohu (1,1) v oboch diagramoch, v stave B je tlak najvyšší.



Obr. RC–3

b) Plyn koná kladnú prácu, ak sa stavy menia v poradí C–B–A–C.

c) Práca vykonaná počas cyklu je rovná obsahu trojuholníka CBA v p–V diagrame

$$W = \frac{1}{2}(p_B - p_C)(V_A - V_C) = \frac{1}{4}p_0 V_0.$$

Plyn prijíma teplo iba počas deja CB (teplota rastie). Počas dejov BA (izochorické ochladenie) i AC (izobarické stláčanie) teplota klesá a plyn teplo odovzdáva do okolia.
Prijaté teplo (pre ideálny plyn)

$$Q = \Delta U_{CB} + W_{CB} = C_V(T_B - T_C) + \frac{1}{2}(p_C + p_B)(V_B - V_C).$$

Keďže ide o ideálny plyn jednoatómových molekúl, je $C_V = \frac{3}{2}nR$, a teda zmena vnútornej energie

Prijaté teplo je potom

$$Q_{in} = \frac{3}{2}nR(T_B - T_C) + \frac{p_B + p_C}{2}(V_B - V_C) = \frac{3}{2}\frac{3}{2}p_0 V_0 + \frac{3}{2}p_0\frac{1}{2}V_0 = 3p_0 V_0.$$

Účinnosť deja

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{1}{4}p_0 V_0}{3p_0 V_0} = \frac{1}{12} \approx 8{,}3\ \%.$$

4) Uvoľnené teplo

Riešenie:

a) Po pripojení zdroja elektrického napätia k uzlom A a C majú uzly E a F a podobne H a G rovnaký potenciál, a preto vodičmi EF a HG prúd neprechádza a možno ich tak odpojiť. Odpor medzi uzlami E a H je

$$R_{\mathrm{EH}} = \frac{R\left(2R\right)}{R+2R} = \frac{2}{3}R\,.$$

Medzi uzlami A a C sú tak dve paralelné vetvy s odpormi $2R + \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}R$, a teda výsledný odpor je $R_{\mathrm{AC}} = \frac{4}{3}R \approx 0{,}67\ \Omega$.

b) Medzi uzlami EH je zapojený trojuholník EHD s odporom $R_{\mathrm{EH}} = (2/3)\,R$ a a paralelne k nemu séria troch trojuholníkov EFA, FGB a GHC s celovým odporom $3\times(2/3)\,R$. Výsledný odpor

$$R_{\mathrm{EH}} = \frac{\frac{2}{3}R\left(2R\right)}{\frac{2}{3}R+2R} = \frac{1}{2}R \approx 0{,}25\ \Omega.$$

c) S vodičom AE je paralelne sériová kombinácia vodiča AF a paralelnej kombinácie vodiča EF a série troch trojuholníkov EHD, HGC a GFB.

$$R_{\mathrm{AE}} = \frac{\left(\dfrac{3\left(\frac{2}{3}R\right)R}{3\left(\frac{2}{3}R\right)+R}+R\right)R}{\left(\dfrac{3\left(\frac{2}{3}R\right)R}{3\left(\frac{2}{3}R\right)+R}+R\right)+R} = \frac{5}{8}R \approx 0{,}31\ \Omega.$$

d) Sieť má vzhľadom na uzly A a C odpor $R_{\mathrm{AC}} = (4/3)\,R$. Výkon uvoľnený v sieti

$$P = \frac{U^2}{R_{\mathrm{AC}}}$$

Prúd vstupujúci zo zdroja do uzlu A je $I_{\mathrm{A}} = U/R_{\mathrm{AC}}$ a rozdelí sa na polovice $(1/2)\,I_{\mathrm{A}}$ do vodičov AE a AF. Tento prúd sa v trojuholníku EHD rozdelí do vodičov EH a ED, pričom prúd stranou štvorca EH je

$I_{\mathrm{EH}} = I_{\mathrm{FG}} = \dfrac{I_{\mathrm{A}}}{2}\,\dfrac{2R}{2R+R} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{U}{R}$. Prúdy $I_{\mathrm{EF}} = I_{\mathrm{GH}} = 0$ z dôvodu symetrie obvodu (pozri časť a)).

Výkon uvoľnený vo vodičoch strán štvorca

$$P_1 = R\,I_{\mathrm{EH}}^2 + R\,I_{\mathrm{FG}}^2 = \frac{2U^2}{9R}\,.$$

Pomer

$$k = \frac{P_1}{P} = \frac{1}{6}\,.\,k = \frac{P_1}{P} = \frac{8}{27}\,.$$

64. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie C*

Autori návrhov úloh:	Ľubomír Konrád (2, 3, 4), Ivo Čáp (1)
Recenzia:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023