64. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2022/2023
Krajské kolo kategórie E
Riešenie úloh

1) Kocky

Riešenie:

a) Voda v nádobe vytvára vrstvu hĺbky H_0

$$H_0 = \frac{V_0}{a^2} = \frac{10{,}00\ \mathrm{L}}{16{,}00\ \mathrm{dm}^2} = 6{,}25\ \mathrm{cm}.$$

Prvá kocka má menšiu dĺžku hrany ako je hĺbka vody v nádobe, $b < H_0$, preto vďaka hustote dreva ρ menšej ako hustota vody ρ_v bude plávať. 2 body

Ak zatlačíme druhú kocku až na dno, stúpne hladina vody v nádobe na výšku H_2 danú rovnicou

$$a^2 H_2 = V_0 + c^2 H_2,$$

kde $c^2 H_2$ je objem ponorenej časti kocky. Odtiaľ dostávame

$$H_2 = \frac{V_0}{a^2 - c^2} = \frac{10{,}00\ \mathrm{L}}{(16{,}00 - 2{,}56)\ \mathrm{dm}^2} \approx 7{,}44\ \mathrm{cm}$$

Tiaž vody vytlačenej druhou kockou zatlačenou na dno

$$G_{\mathrm{v2}} = H_1 c^2 \rho_{\mathrm{v}}\, g \approx 16{,}7\ \mathrm{N}.$$

Tiaž druhej kocky $G_2 = c^3 \rho g \approx 24{,}1$ N.

Keďže $G_2 > G_{\mathrm{v1}}$, kocka zostane na dne nádoby a nebude plávať. 2 body

b) Tretia kocka bude plávať, lebo má menšiu hustotu ako voda, a v nádobe je dostatok vody – ak kocku zatlačíme dna dno nádoby, vytečie voda s objemom

$$V_{\mathrm{v}} = V_0 + d^3 - a^3 = 0{,}872\ \mathrm{L}.$$

Podľa Archimedovho zákona určíme dĺžku d_p ponorenej časti kocky

$$d_{\mathrm{p}}\, d^2\, \rho_{\mathrm{v}}\, g = d^3\, \rho\, g, \text{ odkiaľ máme } d_{\mathrm{p}} = d\, \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{v}}} = 228\ \mathrm{mm}.$$

Určíme výšku H_4 hladiny. Objem vody a ponorenej časti kocky je rovný objemu v nádobe pod hladinou vody

$$V_0 + d_{\mathrm{p}}\, d^2 = H_4\, a^2.$$

Odtiaľ

$$H_4 = \frac{V_0 + d_{\mathrm{p}}\, d^2}{a^2} = 268\ \mathrm{mm}.$$

Z toho vyplýva, že spodná stena kocky je nad dnom nádoby vo výške

$$h_4 = H_4 - d_{\mathrm{p}} = 40\ \mathrm{mm}.$$

Horná stena je nad dnom nádoby vo výške $h_5 = h_4 + d = 420$ mm, tzn. vo výške $h_v = 20$ mm nad horným okrajom nádoby. 3 body

c) Ak je horná stena na úrovni horného okraja nádoby, je celá kocka v objeme nádoby. Objem nádoby je $a^3 = 64\ \mathrm{dm}^3 = 64{,}0$ L. Objem kocky je $d^3 = 54{,}9\ \mathrm{dm}^3 \approx 55$ L. Do rozdielu objemov $a^3 - d^3 = 9{,}1$ L sa voda s objemom 10 L nezmestí, preto nádoba je naplnená až po okraj a časť vody o objeme 0,9 L vytečie cez okraj.

Keďže je celá kocka ponorená, je vztlaková sila

$$F_v = d^3 \rho_v g = 538{,}3\ \mathrm{N}.$$

Tá je v rovnováhe s tiažou kocky a pridaného telieska s hmotnosťou m

$$F_v = d^3 \rho_v g = d^3 \rho g + mg.$$

Odtiaľ dostávame

$$m = d^3 (\rho_v - \rho) = 21{,}949\ \mathrm{kg} \approx 21{,}9\ \mathrm{kg}.$$ 2 body

2) Meteoroid

Riešenie:

a) Teplo Q_1 potrebné na zohriatie tuhého železa z teploty t_0 = –200 °C na teplotu topenia železa t_t = 1 538 °C je

$$Q_1 = mc_1(t_t - t_0) = (1{,}00\ \text{kg})\left(450\,\frac{\text{J}}{\text{kg·°C}}\right)(1738\ \text{°C}) = 782{,}1\ \text{kJ} \approx 782\ \text{kJ}.$$

Teplo Q_2 potrebné na premenu tuhého železa s teplotou topenia t_t = 1 538 °C na roztopené železo s rovnakou teplotou je

$$Q_2 = m\,h_t = (1{,}00\ \text{kg})\left(246\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right) = 246\ \text{kJ}.$$

Celkové potrebné teplo

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2 = 1028\ \text{kJ} \approx 1{,}03\ \text{MJ}.$$

Teplo je dodané trením. Pokiaľ meteoroid preletí celou prvou vrstvou, odporová sila vykoná prácu

$$W_1 = F_1(h_1 - h_2) = (100\ \text{N})(30\ \text{km}) = 3{,}0\ \text{MJ}$$

z toho meteoroid prijme teplo

$$Q_{t1} = \eta W_1 = 1{,}2\ \text{MJ},$$

a to postačuje k roztopeniu meteoroidu, lebo $Q_{t1} > Q_{12}$.

Potrebné teplo Q_{12} získa a zodpovedajúcu prácu vykoná na dráhe s_1, pre ktorú platí

$$F_1 s_1 \eta = Q_{12},\ \text{odkiaľ}\ s_1 = \frac{Q_{12}}{F_1\eta} = \frac{1028\ \text{kJ}}{(100\ \text{N})\times 0{,}40} \approx 25{,}7\ \text{km}$$

tomu zodpovedá výška $h_t = (h_1 - s_1) = (50 - 25{,}7)\ \text{km} = 24{,}3\ \text{km}$.

Meteoroid na teplotu topenia sa zohreje do výšky 24,3 km. 5 bodov

b) Pohybová energia E_{k1} vo výške h_1

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(1{,}00\ \text{kg})\left(10{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2 = 50{,}0\ \text{MJ}.$$

Odporová sila F_1 na dráhe s_1 znížila pohybovú energiu o prácu, ktorú odporová sila vykonala. Súčasne sa zmenšila polohová energia meteoroidu. Po roztopení má meteoroid rýchlosť v_1 pre ktorý platí

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - F_1 s_1 + mg(h_1 - h_t) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Q_{12}}{\eta} + mgs_1 =$$

$$= (50{,}0 - 2{,}57 + 0{,}73)\ \text{MJ} = 48{,}16\ \text{MJ} \approx 48{,}2\ \text{MJ}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{48{,}16\ \text{MJ}}{0{,}50\ \text{kg}}} = 9{,}81\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$ 4 body

c) Rastúcou výškou klesá odporová sila. Akékoľvek fyzikálne správne zdôvodnenie (vyššia hustota) 1 bod

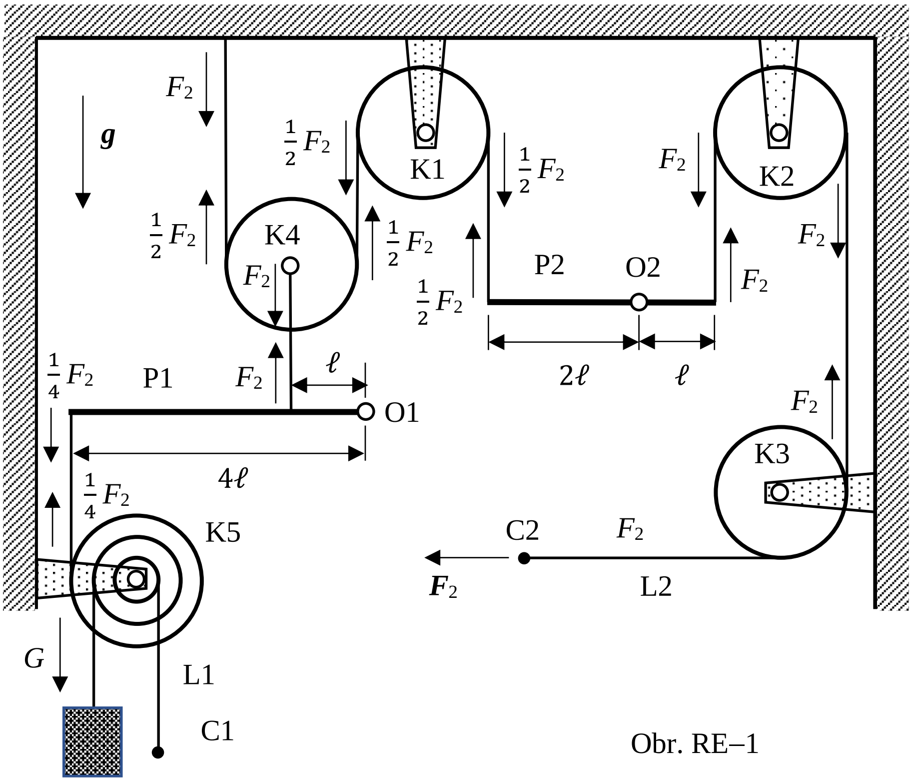
3) Systém kladiek a pák

Riešenie

a) Ak koniec C2 lanka voľne visí, je napínané nulovou silou. Táto sila sa prenáša až na bubon r_3 kladky K5. Moment sily závažia na kladku sa preto vyrovnáva momentom sily F_1 a platí

$G r_2 = F_1 r_1$ odkiaľ $F_1 = \frac{r_2}{r_1} G = 2G = 42$ N. 3 body

b) Na obrázku sú zaznamenané sily napínajúce lanko v jeho jednotlivých úsekoch a pôsobiace na jednotlivé časti sústavy.



Obr. RE–1

Keďže neuvažujeme tiaž kladiek a pák, je sila napínajúca lanko na oboch stranách kladiek rovnaká. Sila F_2 sa prenáša cez kladky K3 a K2 na páku P2. V stave rovnováhy platí na páke rovnováha momentov, takže na konci druhého ramena s dvojnásobnou dĺžkou je sila polovičná ½ F_2. Tá sa cez kladku K1 prenáša na kladku K4, kde platí opäť rovnováha momentov síl a v osi kladky pôsobí na vlákno sila dvojnásobná teda F_2. Moment tejto sily na páke P1 je v rovnováhe s momentom sily ¼ F_2 na jej konci. Táto sila pôsobiaca na najväčšom bubne kladky K5 je v rovnováhe s momentom tiaže závažia

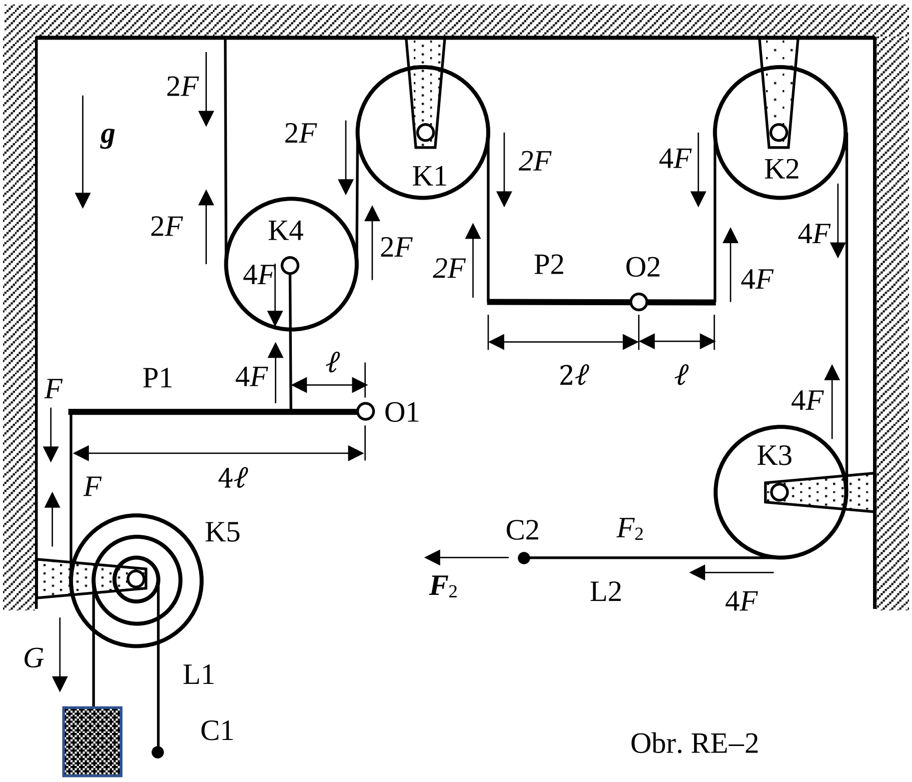
$\frac{1}{4} F_2 r_3 = G r_2$, odkiaľ máme $F_2 = 4 G \frac{r_2}{r_3} = \frac{8}{3} G = 56$ N.

Pozn.: Možno postupovať aj opačne, obr. RE–2.
V stave rovnováhy je závažie udržiavané ťahovou silo vlákna F, pričom platí $3F = 2G$, teda

$F = \frac{2}{3} G$.

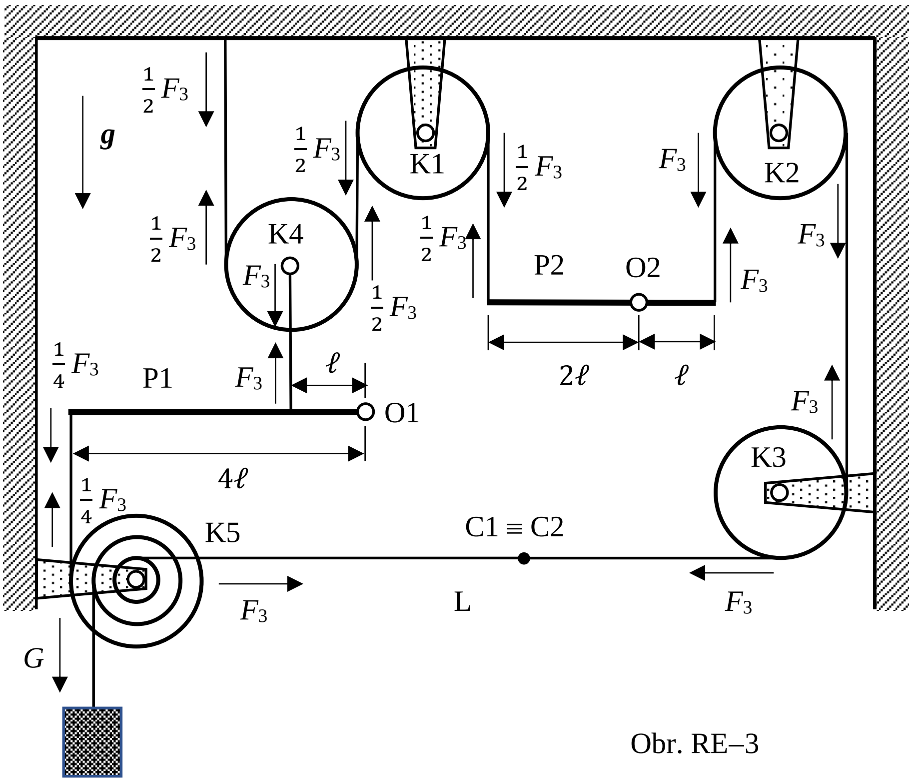
Na páke s pomerom ramien 1 : 4 je táto sila vyvážená silo $4F$, ktorá sa prenáša na os kladky K4. Na obvode kladky pôsobí sila $2F$, ktorá sa prenáša na páku P2 s pomerom ramien 2 : 1 a je teda vyvážená silou $4F$ na druhom ramene. Tá sa vláknom prenesie až do bodu C2. Preto ťahová sila v bode C2

$F_2 = 4F = 4\,\frac{2}{3}\,G = \frac{8}{3}\,G = 56\ \text{N}.$ 4 body



Obr. RE–2

c) Situáciu znázorňuje obr. RE–4, v ktorom sú zakreslené pôsobiace sily.



Obr. RE–3

Označme ťahovú silu F_3 vo vodorovnom vlákne s bodom C1 ≡ C2. Táto sila sa prenáša cez kladky K3 a K2 na páku P2. Silu sledujeme podobne ako v časti b) až na kladku K5, kde má veľkosť ¼ F_3.

Pre momentovú rovnováhu na kladke K5 platí

$$G\,r_2 = \tfrac{1}{4}\,F_3\,r_3 + F_3\,r_1, \text{ resp. } G\,2r_1 = \tfrac{1}{4}\,F_3\,3r_1 + F_3\,r_1,$$

odkiaľ dostávame

$$F_3 = \frac{8}{7}\,G = 24\ \text{N}.$$ 3 body

4) Večernica

Riešenie:

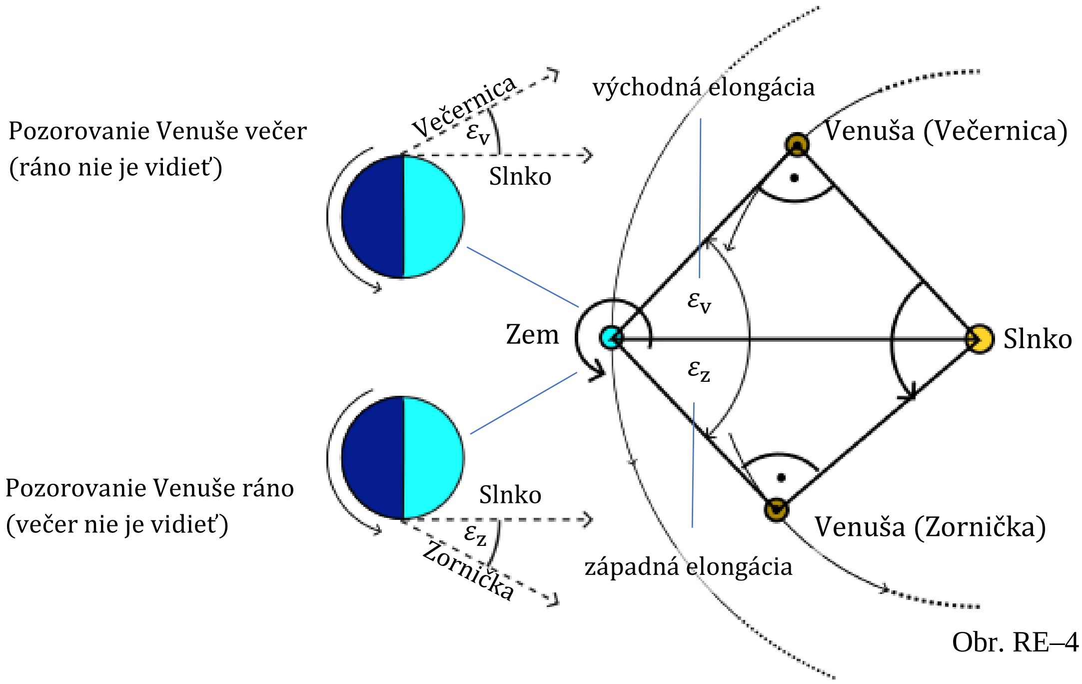
a) Celý obeh okolo Slnka, tzn. $\varphi = 360°$, trvá dobu T_V. Za jeden deň prejde uhol

$$\omega_V \approx \frac{360°}{224{,}70\ \text{d}} = 1{,}602\ °/\text{d},$$ 1 bod

v prípade Zeme je to

$$\omega_Z \approx \frac{360°}{365{,}26\ d} = 0{,}986\ °/\text{d}.$$ 1 bod

b) Situáciu znázorňuje obr. RE–4. 1 bod



Obr. RE–4

Maximálna elongácia nastáva geometricky vtedy, keď lúče svetla prichádzajúce z Venuše tvoria dotyčnicu k jej trajektórii. Trajektória Venuše je kružnica, preto Zem, Venuša a Slnko tvoria trojuholník s pravým uhlov vo vrcholu, ktorý tvorí Venuša (obr. RE–4) 1 bod

Venuša je Večernicou pokiaľ je na východ od Slnka, a zostáva na oblohe aj po západe Slnka, t.j. pri východnej elongácii. Naopak, je Zorničkou pokiaľ je na západ od Slnka, a vychádza nad obzory ešte pred východom Slnka, t.j. pri západnej elongácii 1 bod

c) Pozorovanie znázorňuje obr. RE–4. 1 bod

V obrázku je znázornená poloha Slnka, Zeme a poloha Venuše (Večernice, Zorničky), keď je pozorovaná najvyššie nad obzorom. Vzdialenosť R_{ZV} určíme pomocou Pytagorovej vety

$$R_{ZV} = \sqrt{R_Z^2 - R_V^2} \approx 105\ \text{mil. km}.$$ 1 bod

d) Obrázok FR–1 možno nakresliť vo vhodnej mierke so skutočnými rozmermi a východná a západná elongácie sa rovnajú (v našom zjednodušenom opise) $\varepsilon = \varepsilon_V = \varepsilon_Z$ určiť napr. uhlomerom.

Najjednoduchšie je prehlásiť, že odvesny pravouhlého trojuholníka sú takmer rovnaké (105 a 107 miliónov kilometrov), takže trojuholník je prakticky rovnoramenný, potom

$\varepsilon \approx 45°$. 1 bod

Pri pohľadu zo Slnka musí Venuša prejsť uhol 2ε. Čas prechodu Venuše z polohy Večernice do polohy Zorničky vzhľadom na Zem s uhlovou rýchlosťou $\Delta\omega = \omega_V - \omega_Z$

$T = \frac{2\varepsilon}{\omega_V - \omega_Z} \approx \frac{90°}{(1{,}602 - 0{,}986)°/d} \approx 146$ d. 1 bod

Dátum pozorovania maximálnej uhlovej výšky na obzorom v roku 2023 je

$D_Z = D_V + T = 4.\ 6.\ 2023 + 146\ \text{d} = 28.\ 10.\ 2023$ 1 bod

Pozn.: V skutočnosti bude východná elongácia (max. Z) dňa 23. 10. 2023. Vzhľadom na približný odhad uhlu α a zanedbaní excentricity trajektórií planét je získaný výsledok veľmi dobrý.

Fyzikálna olympiáda – 64. ročník – úlohy krajského kola kat. E
Autor úloh: Aba Teleki
Recenzia úloh: Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Preklad do maďarského jazyka: Aba Teleki
Vydalo: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023