
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

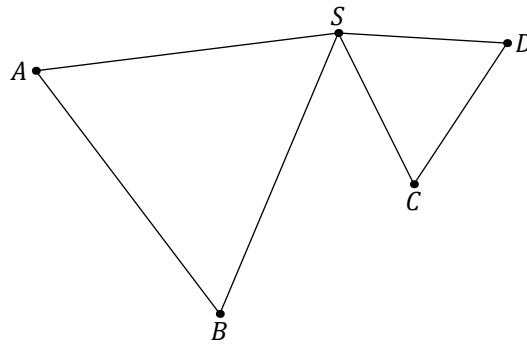
- 1 V nasledujúcich úlohách predpokladáme, že na párty sú aspoň dve osoby a známosti jej účastníkov sú vzájomné. To sa však netýka sympatií z návodnej úlohy N1 a doplňujúcej úlohy D1.
- N1** Pri stole sedia traja chlapci a štyri dievčatá. Každému chlapcovi sa páčia tri dievčatá, každému dievčaťu len jeden chlapec. Existuje medzi nimi vždy dvojica opačného pohlavia, v ktorej sa obom páči ten druhý?
- N2** Na párty sa každého z návštevníkov spýtame, koľko ostatných návštevníkov pozná. Ukážte, že ak ich odpovede sčítame, vyjde vždy párne číslo.
- N3** Ukážte, že na každej párty možno nájsť aspoň dvoch účastníkov, ktorí tam majú rovnaký počet známych.
- D1** Môže sa na párty zo súťažnej úlohy v prípade $k = 6$ stať, že bude existovať práve 20 párov, v ktorých sa obom páči ten druhý?
- D2** Na párty sa každý účastník pozná práve s tromi ďalšími. Ukážte, že počet účastníkov párty je párny. Ďalej uveďte príklady známostí na takých párty so 6, 8 a 2024 účastníkmi.
- D3** V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.
- a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.
- b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.
- D4** Lukáš a Marek, ktorí sa poznajú, sa zišli na párty, na ktorej platilo: Ak majú niektorí dvaja účastníci rovnaký počet známych, tak nemajú žiadneho spoločného známeho. Dokážte, že na párty je niekto, kto tam má práve jedného známeho.
- D5** V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatené. Pre kladné celé číslo k , kde $k \geq 3$, hovoríme, že spoločnosť je k -dobrá, ak možno každú k -tícu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každý dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.
- D6** V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

2

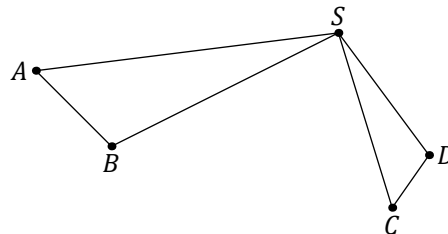
- N1** Nájdite päťciferné čísla, z ktorých každé má päť rôznych nepárnych cifier, pritom súčet prvých troch cifier je 11 a súčet posledných troch cifier je 15.
- N2** Určte najväčšie možné hodnoty nasledujúcich súčtov, v ktorých $(a_1, a_2, \dots, a_8, a_9)$ je ľubovoľné poradie cifier $(1, 2, \dots, 8, 9)$:
- a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,
- b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,
- c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.
- D1** Nájdite najväčšie možné šesťciferné číslo, ktorého každá cifra (počnúc treťou cifrou zľava) je súčtom predchádzajúcich dvoch.
- D2** Dané prirodzené číslo n má cifry, ktorých hodnoty sa zľava doprava zväčšujú. Ukážte, že ciferný súčet čísla $9n$ je vždy rovný 9.
- D3** Nájdite najväčšie možné prirodzené číslo, ktorého každá cifra (okrem oboch krajných) je menšia ako aritmetický priemer susedných cifier.

-
- 3 Pri riešení návodných a doplňajúcich úloh je možné vhodne využiť *špirálovú podobnosť*. Tak nazývame podobné zobrazenia, ktoré sú výsledkom zloženia rovnoľahlosti a otočenia so spoločným stredom, ktorý potom nazývame *stred* tejto špirálovej podobnosti.

- N1** Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú rovnostranné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



- a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.
 b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.
- N2** Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú pri tomto poradí vrcholov podobné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



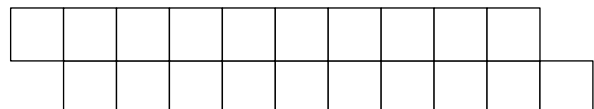
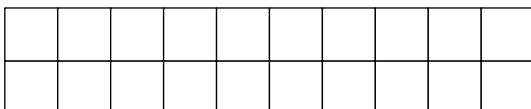
- a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.
 b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.
- D1** Vo vnútri trojuholníka ABC ležia body D, E, F také, že trojuholníky BCD, CAE a ABF sú rovnostranné. Ukážte, že ťažisko týchto trojuholníkov tvorí rovnostranný trojuholník.
- D2** Vnútri pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB a uhlom CAB veľkosti 60° existuje bod P taký, že $|\sphericalangle APB| = 120^\circ$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určite dĺžku úsečky AP .

4

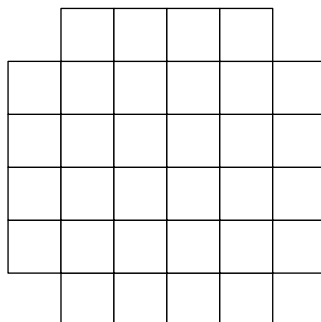
- N1** Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel u a v takých, že u je deliteľom $2v$ a v je deliteľom $3u$.
- N2** Ukážte, že pre žiadne nepárne prvočíslo p nie je číslo $1 + 2 + 3 + \dots + p$ deliteľné žiadnym prvočísлом väčším ako p .
- N3** Pre dané nepárne prvočíslo p označme S súčet všetkých prirodzených čísel menších ako p , ktoré majú vo svojich dekadických zápisoch aspoň jednu cifru z dekadického zápisu čísla p . Ukážte, že ak $p \mid S$, tak číslo S nemá okrem p žiadneho prvočiniteľa väčšieho ako $\frac{1}{2}(p - 1)$.
- D1** Ukážte, že súčet dvoch po sebe idúcich prvočísel nemôže byť dvojnásobok iného prvočísla.
- D2** Dokážte, že ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $a + b + c \mid abc$, tak $a + b + c$ je zložené číslo.
- D3** Nech S_n je súčet prvých n prvočísel. Ukážte, že v intervale $[S_n, S_{n+1}]$ leží druhá mocnina niektorého prirodzeného čísla.
- D4** Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je a) 5, b) 7.

5

- N1** Nájdite neprázdnu podmnožinu políčok tabuľky 20×20 , ktorú je možné vyplniť (bezo zvyšku a prekryvania) ako kópiami ľavého útvaru, tak kópiami pravého útvaru.



- N2** Určte, koľko políčok obsahuje najmenšia plocha, ktorú je možné vyplniť
- ako tetraminami typu I, tak aj tetraminami typu O a tiež aj tetraminami typu L;
 - ako tetraminami typu S, tak aj tetraminami typu T.
- D1** Rozhodnite, či je možné tabuľku na obrázku vyplniť tetraminami typu L.



- D2** Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu T.
- D3** Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu I.
- D4** Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$, kde $n \geq 2$, postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n , pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu $n \times n$ a na každom políčku sa ocitne práve raz.
- D5** Nech n je celé číslo také, že $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria pentomino tvaru T v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

6

- N1** a) Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z dokážte $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + y)z - 2xy$;
 b) Pre ľubovoľné reálne čísla x a y dokážte $2 + x^2(1 + y^2) \geq 2x(1 + y)$.
- N2** Reálne čísla a a b ležia v intervale $[1, 2]$. Ukážte, že platia nasledujúce nerovnosti:
- $a^2 + b^2 \leq 1 + 2ab$,
 - $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{2}ab$,
 - $2 \leq a/b + b/a \leq \frac{5}{2}$,
 - $a^2 + 2b^2 \leq (2a + 1)b + 3$.
- N3** Dokážte, že pre ľubovoľnú n -ticu kladných reálnych čísel (a_1, a_2, \dots, a_n) platí

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Kedy nastane rovnosť?

- N4** Nech a_1, a_2, \dots, a_n sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

t. j. že aritmetický priemer týchto čísel je aspoň taký ako ich harmonický priemer.

- D1** Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

- D2** Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq m^2,$$

pričom

$$m = \min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

D3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $[0, 1]$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

D4 Nech a a b sú reálne čísla také, že platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Dokážte, že $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

D5 Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$.

D6 Nájdite najmenšie kladné reálne číslo t také, že ak reálne čísla a, b, c, d sú také, že $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, tak z nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel má absolútnu hodnotu najviac t .

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1 V nasledujúcich úlohách predpokladáme, že na párty sú aspoň dve osoby a známosti jej účastníkov sú vzájomné. To sa však netýka sympatií z návodnej úlohy N1 a doplňujúcej úlohy D1.

N1 Pri stole sedia traja chlapci a štyri dievčatá. Každému chlapcovi sa páčia tri dievčatá, každému dievčaťu len jeden chlapec. Existuje medzi nimi vždy dvojica opačného pohlavia, v ktorej sa obom páči ten druhý?

Riešenie:

Áno. Všetkých dvojíc je 12. Zvážte, v koľkých z nich sa chlapcovi páči dievča a v koľkých sa dievčaťu páči chlapec, alebo podľa celkového počtu chlapčenských sympatií dokážte, (použitím Dirichletovho princípu alebo sporom) že niektoré dievča sa páči všetkým trom chlapcom.

N2 Na párty sa každého z návštevníkov spýtame, koľko ostatných návštevníkov pozná. Ukážte, že ak ich odpovede sčítame, vyjde vždy párne číslo.

Riešenie:

Koľkokrát sme počítali každú známosť?

N3 Ukážte, že na každej párty možno nájsť aspoň dvoch účastníkov, ktorí tam majú rovnaký počet známych.

Riešenie:

Na párty s n účastníkmi je počet známych každého jedno z n čísel $0, 1, \dots, n - 1$. Aspoň dva z týchto n počtov musia byť rovnaké, pretože je vylúčené, aby sa jeden počet rovnal číslu 0 a iný číslu $n - 1$, teda rôznych počtov je najviac $n - 1$.

D1 Môže sa na párty zo súťažnej úlohy v prípade $k = 6$ stať, že bude existovať práve 20 párov, v ktorých sa obom páči ten druhý?

Riešenie:

Áno. Popíšeme jeden z mnohých možných príkladov. Päť štvorčlenných skupín po 2 chlapcoch a 2 dievčatách rozostavme po obvode kruhu a vyberme „kladný“ smer jeho prechádzania. Predpokladajme, že každému chlapcovi sa páčia práve 2 dievčatá z jeho skupiny a ďalšie 4 dievčatá z dvoch skupín, ktoré sú od jeho skupiny najbližšie v kladnom smere, a že podobne každému dievčaťu sa páčia práve 2 chlapci z jej skupiny a ďalší 4 chlapci z dvoch skupín, ktoré sú od jej skupiny najbližšie v kladnom smere. Potom všetky páry so vzájomnými sympatiami sú časťami vytvorených piatich štvorcí a ich počet tak je $5 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 20.

D2 Na párty sa každý účastník pozná práve s tromi ďalšími. Ukážte, že počet účastníkov párty je párny. Ďalej uveďte príklady známostí na takých párty so 6, 8 a 2024 účastníkmi.

Riešenie:

Označte n počet účastníkov a uvážte, že dvojnásobok počtu všetkých známostí na párty je párne číslo $3n$. V prípade $n = 6$ si predstavte, že účastníci sú rozmiestnení na obvode kruhu a že sa poznajú práve tí, ktorí spolu nesusedia (možné sú aj iné príklady). V prípade $n \bmod 4 = 0$ uvážte napríklad situáciu, keď účastníci sú rozdelení do štvorcí, pričom navzájom sa poznajú práve ľudia z rovnakej štvorice.

D3 V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

Riešenie:

61-B-I-5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=452#page=5>).

D4 Lukáš a Marek, ktorí sa poznajú, sa zišli na párty, na ktorej platilo: Ak majú niektorí dvaja účastníci rovnaký počet známych, tak nemajú žiadneho spoločného známeho. Dokážte, že na párty je niekto, kto tam má práve jedného známeho.

Riešenie:

Označme X jedného z tých účastníkov, ktorí na párty poznajú najviac, povedzme k osôb. Podľa zadania $k \geq 1$,

v prípade $k = 1$ sme hotoví. Ak $k > 1$, žiadni dvaja z k známych vybraného X nemajú rovnaký počet známych, takže týchto k počtov tvorí celú množinu $\{1, 2, \dots, k\}$.

- D5** V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatené. Pre kladné celé číslo k , kde $k \geq 3$, hovoríme, že spoločnosť je k -dobrá, ak možno každú k -ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každý dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.

Riešenie:

67-A-III-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2726#page=2>).

- D6** V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

Riešenie:

61-A-III-5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=492#page=6>).

2

- N1** Nájdite päťciferné čísla, z ktorých každé má päť rôznych nepárnych cifier, pritom súčet prvých troch cifier je 11 a súčet posledných troch cifier je 15.

Riešenie:

Prostredná cifra musí byť 1, pretože $11 + 15$ je o 1 viac ako $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Na prvých dvoch miestach potom musia byť 3 a 7, na posledných dvoch 9 a 5. Všetky takéto čísla 37159, 37195, 73159, 73195 vyhovujú.

- N2** Určte najväčšie možné hodnoty nasledujúcich súčtov, v ktorých $(a_1, a_2, \dots, a_8, a_9)$ je ľubovoľné poradie cifier $(1, 2, \dots, 8, 9)$:

- a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,
b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,
c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.

Riešenie:

- a) 45 – 1 čiže 44.
b) 45 + 9 čiže 54.
c) $2 \cdot 45 - (1 + 2)$ čiže 87.

- D1** Nájdite najväčšie možné šesťciferné číslo, ktorého každá cifra (počnúc tretou cifrou zľava) je súčtom predchádzajúcich dvoch.

Riešenie:

303 369. Cifry zľava doprava sú $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b$ a $3a + 5b$. Z nerovnosti $3a + 5b \leq 9$ vyplýva $a \leq 3$, pritom v prípade $a = 3$ platí $b = 0$.

- D2** Dané prirodzené číslo n má cifry, ktorých hodnoty sa zľava doprava zväčšujú. Ukážte, že ciferný súčet čísla $9n$ je vždy rovný 9.

Riešenie:

Ak má dané n cifry c_1, c_2, \dots, c_k , kde $c_1 < c_2 < \dots < c_k$, sú cifry čísla $10n - n$ podľa písomného algoritmu na odčítanie zľava doprava $c_1, c_2 - c_1, \dots, c_{k-1} - c_{k-2}, c_k - (c_{k-1} + 1), 10 - c_k$. Ich súčet je naozaj 9.

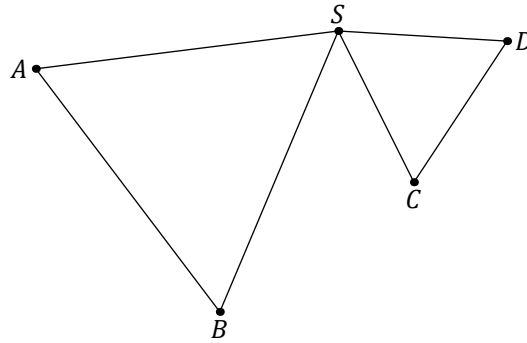
- D3** Nájdite najväčšie možné prirodzené číslo, ktorého každá cifra (okrem oboch krajných) je menšia ako aritmetický priemer susedných cifier.

Riešenie:

96 433 469. Číslo so zápisom $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$, kde $n \geq 3$, vyhovuje zadaniu práve vtedy, keď pre každé prípustné i platí $c_{i+1} - c_i > c_i - c_{i-1}$. Hľadáme tak najväčšie číslo, pre ktoré je zodpovedajúca postupnosť rozdielov $c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_n - c_{n-1}$ rastúca. Nech je prvých k rozdielov záporných a posledných $n - 1 - k$ rozdielov nezáporných. Pre ich súčty platí $c_{k+1} - c_1 \geq -9$ a $c_n - c_{k+1} \leq 9$. Odtiaľ s ohľadom na vzťah $1 + 2 + 3 + 4 > 9$ vyplýva, že $k \leq 3$ a $n - 1 - k \leq 4$ (je možný aj rozdiel 0), čiže $n - k \leq 5$. Preto $n = k + (n - k) \leq 8$. Ukážme, že ak $n = 8$ (vtedy nutne $k = 3$), tak vyhovujúce číslo existuje. Keďže hľadáme najväčšie také, nech $c_1 = 9$ (c_1 je možné vždy zväčšiť). Potom však zo vzťahov $c_1 = 9$ a $k = 3$ vyplýva, že $c_2 - c_1 \leq -3$, čiže $c_2 \leq 6$, pritom v prípade $c_2 = 6$ platí $c_3 - c_2 = -2$ a $c_4 - c_1 = -1$, takže potom štvorčísle $c_1 c_2 c_3 c_4$ je 9643. Z podmienky nezápornosti čísla $c_5 - c_4$ v prípade $c_4 = 3$ však vyplýva, že jediné vyhovujúce štvorčísle $c_5 c_6 c_7 c_8$ je 3469.

- 3** Pri riešení návodných a dopĺňajúcich úloh je možné vhodne využiť *špirálovú podobnosť*. Tak nazývame podobné zobrazenia, ktoré sú výsledkom zloženia rovnoľahlosti a otočenia so spoločným stredom, ktorý potom nazývame *stred* tejto špirálovej podobnosti.

- N1** Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú rovnostranné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:

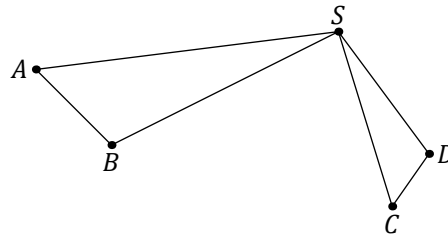


- a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.
 b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.

Riešenie:

Uvažujte otočenie so stredom S a uhlom 60° . Čo je obrazom úsečky AC ? Čo je obrazom jej stredy?

- N2** Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú pri tomto poradí vrcholov podobné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



- a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.
 b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.

Riešenie:

Uvažujte špirálovú podobnosť so stredom S , ktoré zobrazí A na B , a teda aj C na D . Potom vykonajte analogické úvahy ako pri riešení úlohy N1.

- D1** Vo vnútri trojuholníka ABC ležia body D, E, F také, že trojuholníky BCD, CAE a ABF sú rovnostranné. Ukážte, že ťažisko týchto trojuholníkov tvorí rovnostranný trojuholník.

Riešenie:

Označte spomínané ťažiská postupne A_1, B_1, C_1 a uvažujte špirálovú podobnosť so stredom v C , ktorá zobrazuje B_1 na A , a teda aj A_1 na D . Pre úsečku B_1A_1 a jej obraz AD potom platí $|AD| = \sqrt{3} |B_1A_1|$. Analogickými úvahami odvodíme nielen $|BE| = \sqrt{3} |C_1B_1|$ a $|CF| = \sqrt{3} |A_1C_1|$, ale aj $|BE| = \sqrt{3} |A_1B_1|$, $|CF| = \sqrt{3} |B_1C_1|$ a $|AD| = \sqrt{3} |C_1A_1|$. Odtiaľ už vyplýva $|A_1B_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1|$.

- D2** Vnútri pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB a uhlom CAB veľkosti 60° existuje bod P taký, že $|\sphericalangle APB| = 120^\circ$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určite dĺžku úsečky AP .

Riešenie:

$|AP| = 2$. Uvažujte špirálovú podobnosť so stredom v bode A , ktorá zobrazí C na B . Obraz bodu P označte P' . Koeficient tejto podobnosti je $|BA| / |CA|$ čiže $1 / \cos 60^\circ$, čo je 2, teda BP' je obraz úsečky CP s dĺžkou 1, takže $|BP'| = 2$. Ďalej z podobnosti trojuholníkov ABC a $AP'P$ pri tomto poradí vrcholov (podľa vety sus) vyplýva $|\sphericalangle AP'P| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle APP'| = 90^\circ$, teda $|\sphericalangle P'PB| = |\sphericalangle APB| - |\sphericalangle APP'| = 30^\circ$, čo spolu so vzťahmi $|BP| = 4$ a $|BP'| = 2$ dáva $|\sphericalangle BP'P| = 90^\circ$. Priemka PP' tak zvierá zhodné striedavé uhly ako s priamkami AP a $P'B$, tak s priamkami AP' a BP . Štvoruholník $APBP'$ je preto rovnobežník, odkiaľ $|AP| = |BP'| = 2$.

- N1** Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel u a v takých, že u je deliteľom $2v$ a v je deliteľom $3u$.

Riešenie:

Existujú kladné celé čísla a, b také, že $2v = au$ a $3u = bv$. Vynásobením dostaneme $6vu = abuv$, čiže $ab = 6$, preto (a, b) je jedna z dvojíc $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$. Požadované rovnosti $2v = au$ a $3u = bv$ sa potom postupne redukovujú na $u = 2v$, $u = v$, $u = \frac{2}{3}v$, $u = \frac{1}{3}v$. Vyhovujú teda práve dvojice (u, v) tvarov

$(2n, n), (n, n), (2n, 3n), (n, 3n)$, kde n je kladné celé číslo.

- N2** Ukážte, že pre žiadne nepárne prvočíslo p nie je číslo $1 + 2 + 3 + \dots + p$ deliteľné žiadnym prvočíslom väčším ako p .

Riešenie:

Tento súčet je $\frac{1}{2}p(p+1)$, teda každý jeho prvočiniteľ q delí niektoré z čísel p alebo $p+1$, a preto $q \leq p$. Prvočíslo p je nepárne, a tak párne číslo $p+1$ je aspoň 4, a je teda zložené.

- N3** Pre dané nepárne prvočíslo p označme S súčet všetkých prirodzených čísel menších ako p , ktoré majú vo svojich dekadických zápisoch aspoň jednu cifru z dekadického zápisu čísla p . Ukážte, že ak $p \mid S$, tak číslo S nemá okrem p žiadneho prvočiniteľa väčšieho ako $\frac{1}{2}(p-1)$.

Riešenie:

Zrejme $S \leq 1 + 2 + \dots + (p-1) = \frac{1}{2}p(p-1)$, odkiaľ $S/p \leq \frac{1}{2}(p-1)$, kde S/p je kladné celé číslo vďaka predpokladu $p \mid S$. Preto ak je q nejaký prvočiniteľ čísla S rôznych od p , je aj prvočiniteľom čísla S/p , ktoré samo, ako vieme, neprevyšuje $\frac{1}{2}(p-1)$.

- D1** Ukážte, že súčet dvoch po sebe idúcich prvočísel nemôže byť dvojnásobok iného prvočísla.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom: Neh p a r sú po sebe idúce prvočísla. Nech q je prvočíslo také, že $p+r = 2q$, t. j. $\frac{1}{2}(p+r) = q$. Číslo q teda leží vo vnútri otvoreného intervalu (p, r) , v ktorom však nie sú žiadne prvočísla.

- D2** Dokážte, že ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $a+b+c \mid abc$, tak $a+b+c$ je zložené číslo.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom: Ak by číslo $a+b+c$ bolo prvočíslo, bolo by (vďaka zadanej podmienke $a+b+c \mid abc$) deliteľom aspoň jedného z čísel a, b, c . Tie sú však všetky menšie ako $a+b+c$, čo je spor.

- D3** Nech S_n je súčet prvých n prvočísel. Ukážte, že v intervale $[S_n, S_{n+1}]$ leží druhá mocnina niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie:

Ukážme najprv, že na to, aby vo všeobecnejšom intervale $[S, S + (2k+1)]$, kde S a k sú prirodzené čísla, ležala druhá mocnina, stačí, aby platilo $S \leq (k+1)^2$. Ak totiž v $[S, S + (2k+1)]$ neleží žiadne z čísel $1^2, 2^2, \dots, k^2$, tak $k^2 < S \leq (k+1)^2$, a teda v danom intervale leží číslo $(k+1)^2$.

Pri zrejmom označení tak v našej úlohe stačí pre každé n dokázať nerovnosť $p_1 + \dots + p_n \leq \frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$ (podľa predchádzajúceho tvrdenia v prípade $k = \frac{1}{2}(p_{n+1} - 1)$). Keďže $p_1 - 1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sú rôzne čísla z množiny nepárnych čísel $\{1, 3, 5, \dots, p_{n+1} - 2\}$ so súčtom $\frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2$, stačí dokázať, že $1 + \frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2 \leq \frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$. To je ale zrejme, pretože celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2$ je menšie ako celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$.

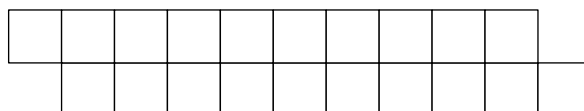
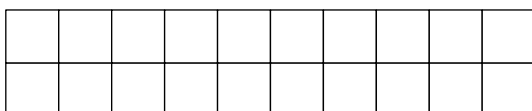
- D4** Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je a) 5, b) 7.

Riešenie:

70-A-I-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3467>).

5

- N1** Nájdite neprázdnu podmnožinu políčok tabuľky 20×20 , ktorú je možné vyplniť (bezo zvyšku a prekryvania) ako kópiami ľavého útvaru, tak kópiami pravého útvaru.



Riešenie:

Použite každý útvar štyrikrát „dookola“.

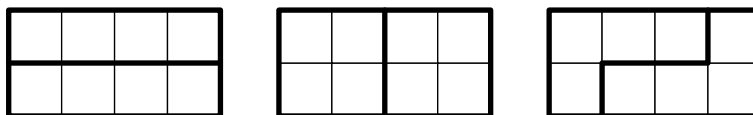
- N2** Určte, koľko políčok obsahuje najmenšia plocha, ktorú je možné vyplniť

- a) ako tetraminami typu I, tak aj tetraminami typu O a tiež aj tetraminami typu L;
b) ako tetraminami typu S, tak aj tetraminami typu T.

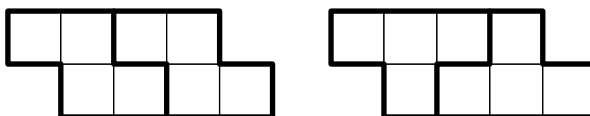
Riešenie:

8 políčok pre obe úlohy. Každá vyhovujúca plocha musí byť zložená z aspoň dvoch kópií každého zo spomínaných tetramín, a mať tak aspoň 8 políčok. Možné príklady plôch s 8 políčkami aj s požadovanými vyplneniami:

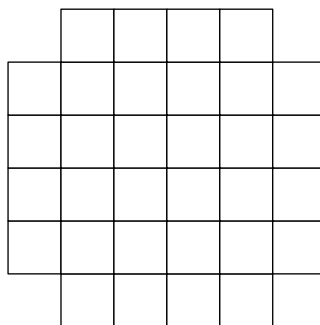
a)



b)



D1 Rozhodnite, či je možné tabuľku na obrázku vyplniť tetraminami typu L.



Riešenie:

Dá sa to. Dokonca je možné bez presahu vyplniť „polovicu“ tabuľky, rozdelenej jej zvislou (alebo vodorovnou) osou súmernosti.

D2 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu T.

Riešenie:

Nejde to. Ofarbite tabuľku bielymi a čiernymi políčkami ako šachovnicu. Potom každé tetramino typu T pokrýva nepárny počet čiernych políčk. Pri vyplnení 25 tetraminami typu T by celkový počet pokrytých čiernych políčk bol nepárny.

D3 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu I.

Riešenie:

Nejde to. Uvažujte „hrubšie“ šachovnicové zafarbenie, keď jednofarebné štvorce majú veľkosť 2×2 . Koľko čiernych políčk potom pokryje jedno tetramino typu I, koľko by ich bolo pokrytých pri vyplnení jeho 25 kópiami?

D4 Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$, kde $n \geq 2$, postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n , pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu $n \times n$ a na každom políčku sa ocitne práve raz.

Riešenie:

56-A-III-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=225>).

D5 Nech n je celé číslo také, že $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria pentomino tvaru T v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

Riešenie:

72-A-III-6 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4440#page=5>).

6

N1 a) Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z dokážte $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + y)z - 2xy$;

b) Pre ľubovoľné reálne čísla x a y dokážte $2 + x^2(1 + y^2) \geq 2x(1 + y)$.

Riešenie:

Nerovnosť z a) upravte na $(x + y - z)^2 \geq 0$, z b) na $(xy - 1)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$.

N2 Reálne čísla a a b ležia v intervale $[1, 2]$. Ukážte, že platia nasledujúce nerovnosti:

- a) $a^2 + b^2 \leq 1 + 2ab$,
- b) $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{2}ab$,
- c) $2 \leq a/b + b/a \leq \frac{5}{2}$,
- d) $a^2 + 2b^2 \leq (2a + 1)b + 3$.

Riešenie:

Nerovnosť z a) upravte na $(a-b)^2 \leq 1$, nerovnosť z b) na $(2a-b) \cdot (2b-a) \geq 0$. Ľavá nerovnosť z c) platí pre ľubovoľné kladné a a b a možno ju dokázať napríklad úpravou na $(a-b)^2 \geq 0$ alebo použitím A-G nerovnosti pre dve čísla a/b a b/a . Pravá nerovnosť z c) vyplýva z b). Nerovnosť z d) upravte na $(a-b)^2 + (b-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{13}{4}$ a využite to, že $|a-b| \leq 1$ a $0 < b - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$.

N3 Dokážte, že pre ľubovoľnú n -ticu kladných reálnych čísel (a_1, a_2, \dots, a_n) platí

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Kedy nastane rovnosť?

Riešenie:

Po roznásobení dostanete n jednotiek a $n(n-1)/2$ dvojíc zlomkov a_i/a_j a a_j/a_i , kde $1 \leq i < j \leq n$, pritom súčet každých dvoch takých zlomkov je aspoň 2 podľa riešenia časti c) z úlohy N2. Rovnosť nastane práve vtedy, keď platí $a_i/a_j = a_j/a_i$, teda práve vtedy, keď všetky čísla a_i sú rovnaké.

N4 Nech a_1, a_2, \dots, a_n sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

t. j. že aritmetický priemer týchto čísel je aspoň taký ako ich harmonický priemer.

Riešenie:

Upravte na nerovnosť z N3.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Riešenie:

Pričítajte ku každému zlomku 1 a použite N3 pre trojicu $(b+c, c+a, a+b)$.

D2 Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq m^2,$$

pričom

$$m = \min \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

Riešenie:

63-A-I-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=992#page=2>).

D3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $[0, 1]$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

Riešenie:

Vzhľadom na symetriu určite môžeme predpokladať, že $a \geq \max(b, c)$. Prvý zlomok je zrejme najviac 1. Druhý zlomok je najviac $b/(a+c)$, pretože z nerovnosti $(1-a)(1-c) \geq 0$ vyplýva $1+ca \geq a+c$. Podobne tretí zlomok je najviac $c/(a+b)$. Stačí tak dokázať, že súčet $b/(a+c) + c/(a+b)$ je najviac 1. To však vďaka predpokladu $a \geq \max(b, c)$ platí, lebo potom $b/(a+c) \leq b/(b+c)$ a $c/(a+b) \leq c/(b+c)$.

D4 Nech a a b sú reálne čísla také, že platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Dokážte, že $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

Riešenie:

Všimnime si, že v oboch uvedených nerovnostiach nastáva rovnosť v prípade $a = b = \frac{1}{2}$. Uplatnime preto odhad $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ v tvare $a \leq a^2 + \frac{1}{4}$ a jeho obdobu $b \leq b^2 + \frac{1}{4}$. Dostaneme

$$7a + 5b + 12ab \leq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab,$$

prítom výraz napravo je $(9a^2 + 8ab + 7b^2) - 2(a - b)^2 + 3$.

D5 Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$.

Riešenie:

<https://skmo.sk/dokument.php?id=994#page=9>.

D6 Nájdite najmenšie kladné reálne číslo t také, že ak reálne čísla a, b, c, d sú také, že $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, tak z nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel má absolútnu hodnotu najviac t .

Riešenie:

<https://iksko.org/files/1/vzorak1.pdf#page=1>.
