
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

1 Koľko neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$ má súčet prvkov deliteľný 3?

(Eliška Macáková)

2 Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3},$$

ak a, b, c sú reálne čísla také, že platí

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

(Michal Rolínek)

3 Nech E je stred strany AD obdĺžnika $ABCD$. Nech päta F kolmice z vrcholu B na priamku CE leží vnútri úsečky CE . Nech G je päta kolmice z bodu F na stranu AD . Dokážte, že priamka CE rozpoľuje uhol AFG .

(Jaroslav Švrček)

4 Rozhodnite, či existuje päťica kladných celých čísel

- a) (a, a, a, a, b) , kde a, b sú rôzne čísla,
- b) (a, a, b, b, c) , kde a, b, c sú rôzne čísla,

v ktorých je každé z týchto čísel deliteľom súčtu každých troch zo zvyšných štyroch čísel.

(Jaroslav Zhouf)

5 Nech pomer polomeru kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka a polomeru kružnice jemu opísanej je $2 : 5$. Dokážte, že dĺžka jednej z jeho strán je aritmetickým priemerom dĺžok zvyšných dvoch strán.

(Mária Dományová)

6 Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 4×4 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 16 tak, že v každom riadku aj každom stĺpci existuje číslo, ktorého 7-násobok je súčtom zvyšných troch čísel.

(Jaromír Šimša)

Termín odovzdania riešení: **23. 1. 2024**
