

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

## Zadania úloh domáceho kola kategórie C

---

1 Existuje 10 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú postupne deliteľné číslami 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?

(Jaroslav Zhouf)

2 Nech  $M$  je stred prepony  $AC$  pravouhlého trojuholníka  $ABC$ , pričom platí  $|BC| = |CM|$ . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom  $ABC$  a  $ABM$  majú rovnaké polomery.

(Michal Pecho)

3 Majme 20 výrokov:

„Mám práve 1 sestru.“      „Mám práve 1 brata.“  
„Mám práve 2 sestry.“      „Mám práve 2 bratov.“  
...      ...  
„Mám práve 10 sestier.“      „Mám práve 10 bratov.“

a) Každý zo štyroch vlastných súrodencov vyslovil iný z týchto 20 výrokov. Je možné, že všetci štyria mali pravdu?

b) Nájdite najväčšie prirodzené číslo  $n$  také, že každý z  $n$  vlastných súrodencov môže vysloviť iný z týchto 20 výrokov a mať pravdu.

(Josef Tkadlec)

4 Koľko usporiadaných štvoríc kladných celých čísel  $(a, b, c, d)$  so súčtom 100 spĺňa rovnice

$$(a + b)(c + d) = (b + c)(a + d) = (a + c)(b + d)?$$

(Patrik Bak)

5 Na tabuli sú napísané čísla  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ . V každom kroku čísla  $a, b, c$  napísané na tabuli zotrieme a nahradíme ich číslami  $ab, bc, ca$ . Zistite, či po nenulovom počte krokov bude niektoré z čísel napísaných na tabuli prirodzené.

(Jaroslav Zhouf)

6 Daný je obdĺžnik  $ABCD$ , pričom  $|AB| : |BC| = 2 : 1$ . Na jeho stranách  $AB, BC, CD, DA$  sú dané postupne body  $K, L, M, N$  tak, že  $KLMN$  je obdĺžnik a platí  $|KL| : |LM| = 3 : 1$ . Vypočítajte pomer obsahov obdĺžnikov  $ABCD$  a  $KLMN$ .

(Josef Tkadlec)

---

Termín odovzdania riešení: **23. 1. 2024**

---