MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh školského kola kategórie A

1 Z cifier 1 až 9 vytvoríme deväťciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom vypočítame súčet každej trojice susedných cifier a týchto sedem súčtov zapíšeme vzostupne. Rozhodnite, či takto môžeme získať postupnosť

a) $(9, 11, 12, 13, 20, 20, 20)$,

b) $(9, 11, 12, 13, 20, 21, 21)$.

(Martin Melicher)

Riešenie 1:

a) Dokážeme sporom, že nemožno získať žiadnu postupnosť, ktorá obsahuje trikrát číslo 20, teda ani tú zo zadania úlohy.

Pripusťme naopak, že k niektorému číslu $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ s navzájom rôznymi ciframi existujú tri indexy i, j, k také, že $1 \leq i < j < k \leq 7$ a

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = a_j + a_{j+1} + a_{j+2} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 20.$$

Keďže súčet šiestich rôznych cifier je najviac $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4$ čiže 39 čo je menej než $2 \cdot 20$, krajné trojice sčítancov (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) a (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) sa musia „prekrývať". Platí teda $k \leq i + 2$, čo vzhľadom na $i < j < k$ znamená, že $k = i + 2$, a teda $j = i + 1$. Prvá rovnosť tak prejde na $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$, odkiaľ $a_i = a_{i+3}$, čo je spor.

b) Vyhovuje napríklad číslo 849 751 623. Súčty trojíc jeho susedných cifier sú totiž (zľava doprava) 21, 20, 21, 13, 12, 9, 11.

Poznámka:

Hoci je podané riešenie úplné, vysvetlíme, ako príklad vyhovujúceho čísla pre časť b) nájsť. Zistíme dokonca, že okrem uvedeného čísla 849 751 623 vyhovuje už len jeho „zrkadlová" kópia 326 157 948.

Z úvah podobných tým z časti a) nášho riešenia vyplýva, že potrebné súčty rovné číslu 21 nemôžu dávať ani dve disjunktné trojice cifier, ani dve trojice s dvoma spoločnými ciframi – tým hovorme ďalej *susedná trojica*. Dve trojice so súčtom 21 teda majú jednu spoločnú cifru, takže obe susedia s rovnakou trojicou s menším súčtom.

Pre každé dve susedné trojice cifier platí, že ich súčty sa líšia o rozdiel tých dvoch cifier, ktoré ležia iba v jednej z oboch trojíc. Keďže takýto rozdiel je najviac rovný $9 - 1$ čiže 8 a súčty rôzne od 21 sú podľa zadania 9, 11, 12, 13 a 20, trojica so súčtom 21 môže susediť jedine s trojicami so súčtom 13 alebo 20. To môže nastať iba vtedy, ak je jedna z oboch trojíc so súčtom 21 „na kraji", t. j. susedí iba s jednou trojicou.

Rozoberme podrobne situáciu, keď jedna z trojíc so súčtom 21 je *prvá zľava*. Podľa našich úvah vtedy pre hľadané číslo $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ nastane jeden z prípadov:

- (i) $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $a_2 + a_3 + a_4 = 13$, $a_3 + a_4 + a_5 = 21$, $a_4 + a_5 + a_6 = 20$,
- (ii) $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $a_2 + a_3 + a_4 = 20$, $a_3 + a_4 + a_5 = 21$, $a_4 + a_5 + a_6 = 13$.

Prvý prípad ľahko vylúčime, pretože vtedy $a_1 - a_4 = 8$, odkiaľ $a_4 = 1$, a preto z rovnosti $a_3 + a_4 + a_5 = 21$ vyplýva $a_3 + a_5 = 20$, čo je zrejmý spor.

V druhom prípade máme $a_3 - a_6 = 8$, čiže $a_3 = 9$ a $a_6 = 1$, takže zadané rovnosti môžeme po dosadení zjednodušiť na

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 12$$

a

$$a_2 + a_4 = 11.$$

Keďže cifra 9 už tu nevystupuje, z dvoch súčtov rovných 12 vyplýva, že $\{a_1, a_2\}$ a $\{a_4, a_5\}$ sú v niektorom poradí množiny $\{4, 8\}$ a $\{5, 7\}$. Rovnosť $a_2 + a_4 = 11$ potom vedie k záveru, že $\{a_2, a_4\} = \{4, 7\}$. Prvých 6 cifier hľadaného deväťciferného čísla je tak buď 849 751, alebo 579 481. Teraz už k týmto dvom začiatkom začneme skúšať dopĺňať sprava vo vhodnom poradí cifry 2, 3, 6 tak, aby sme dostali nové trojice susedných cifier s doteraz chýbajúcimi súčtami 9, 11 a 12. Nájdeme tak jediné vyhovujúce číslo 849 751 623 (neukončené doplňovania vedú k 849 751 3??, 579 481 26? a 579 481 3??).

(Namiesto takého skúšania je možné postupovať takto: Keďže súčet siedmich čísel zo zadania b) je rovný 107, pre každé vyhovujúce číslo $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ musí platiť $2(a_1 + a_9) + (a_2 + a_8) = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) - 107 = 28$. Pre

$a_1 = 8$ a $a_2 = 4$ odtiaľ dostávame $2a_9 + a_8 = 8$, čo vzhľadom na $\{a_7, a_8, a_9\} = \{2, 3, 6\}$ už zrejme znamená, že nutne platí $\overline{a_7a_8a_9} = 623$. V prípade $a_1 = 5$ a $a_2 = 7$ vychádza $2a_9 + a_8 = 11$, čo však s ciframi $a_8, a_9 \in \{2, 3, 6\}$ nie je možné splniť.)

Druhú situáciu, keď trojica so súčtom 21 je *prvá sprava*, nie je nutné rozoberať. Od takého vyhovujúceho čísla $\overline{a_1a_2 \ldots a_9}$ totiž môžeme prejsť k vyhovujúcemu číslu $\overline{a_9a_8 \ldots a_1}$, ktoré je podľa predchádzajúceho rozboru 849 751 623. Druhej situácii tak zodpovedá jediné vyhovujúce číslo 326 157 948.

Riešenie 2:

a) Pripusťme, že súčty $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, ktoré označíme S_i, pričom $1 \leq i \leq 7$, majú pre niektoré vytvorené číslo $\overline{a_1a_2 \ldots a_9}$ vzostupne usporiadané hodnoty 9, 11, 12, 13, 20, 20, 20. Z rovnosti

$$S_1 + S_4 + S_7 = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$$

a nerovností $11 + 12 + 13 < 45 < 20 + 20 + 9$ vyplýva, že práve jeden z troch súčtov S_1, S_4, S_7 je rovný 20, teda zvyšné dva súčty sú zrejme 12 a 13. Platí tak

$$\{S_1, S_4, S_7\} = \{12, 13, 20\}.$$

Podľa toho rozlíšime ďalej tri prípady, pri ktorých využijeme to, že vďaka rovnosti $S_i - S_{i+1} = a_i - a_{i+4}$ a rôznosti cifier $a_1, \ldots, a_9$ platí

$$0 < |S_i - S_{i+1}| < 9,$$

kde $1 \leq i \leq 6$.

- V prípade $S_1 = 20$ platí $0 < |S_2 - 20| < 9$, čo je v spore s tým, S_2 je jedno z čísel 9, 11, 20.
- V prípade $S_4 = 20$ dostaneme spor ako v prvom prípade, kde S_2 zameníme za S_3.
- V prípade $S_7 = 20$ stačí podobne zameniť S_2 za S_6.

b) Ako v riešení 1.

Poznámka:

K práve dokončenému dôkazu sporom dodajme nasledujúce. Pretože tri zo súčtov S_i majú rovnakú hodnotu 20, možno potrebný spor získať z nerovností $0 < |S_i - S_{i+1}| < 9$ aj bez použitia výsledku $\{S_1, S_4, S_7\} = \{12, 13, 20\}$. Naozaj, vďaka týmto nerovnostiam môžu tri čísla 20 susediť v sedmici $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7)$ iba s číslami 12 a 13. Je však zrejmé, že každá trojica po dvoch nesusedných členov má tú vlastnosť, že jej členy susedia dokopy s aspoň troma ďalšími členmi. (Ak je totiž v každej z oboch „medzier“ medzi členmi danej trojice iba po jednom člene, leží aspoň jeden ďalší člen pred prvým alebo za posledným členom tejto trojice.)

Poznámka:

Ukážme, že aj úvahy z druhého dôkazu sporom je možné využiť pri hľadaní všetkých čísel $\overline{a_1a_2 \ldots a_9}$, ktoré vyhovujú časti b) zadania. Opäť pre každé i z $\{1, \ldots, 7\}$ nech $S_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Nerovnosti $0 < |S_i - S_{i+1}| < 9$ pritom budeme využívať bez odkazov.

Podľa zadaných hodnôt 9, 11, 12, 13, 20, 21, 21 súčtov S_i tentoraz zistíme, že $\{S_1, S_4, S_7\}$ je jedna z množín $\{12, 13, 20\}$ alebo $\{11, 13, 21\}$. Štvorica zvyšných súčtov (S_2, S_3, S_5, S_6) je tak (až na poradie) jedna zo štvoríc $(9, 11, 21, 21)$ alebo $(9, 12, 20, 21)$. Keďže navyše platí

$$\left|(S_2 + S_5) - (S_3 + S_6)\right| = |a_2 - a_8| < 9,$$

každá z dvojíc (S_2, S_5) a (S_3, S_6) zrejme obsahuje číslo 20 alebo 21, pritom iba jedna z nich aj číslo 9. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že touto dvojicou s číslom 9 je (S_2, S_5) (inak cifry východiskového čísla zapíšeme v opačnom poradí). Ďalej rozlíšime dva prípady.

- Prípad $S_2 = 9$.

  Vtedy, ako vieme, platí $S_5 \geq 20$, a keďže $S_3 < S_2 + 9 < 20$, taktiež $S_6 \geq 20$. Vzhľadom na $S_5 \neq S_6$ tak máme $\{S_5, S_6\} = \{20, 21\}$, a preto $\{S_1, S_4, S_7\} = \{11, 13, 21\}$, teda S_3 je „zvyšná“ hodnota 12. Teraz z $S_2 = 9$ a $S_3 = 12$ vyplýva, že 21 sa nerovná ani S_1 ani S_4, a preto $21 = S_7$, odkiaľ $S_6 = 20$ a $S_5 = 21$. Podľa poslednej rovnosti platí $S_4 > 12$, a preto $S_4 = 13$ a $S_1 = 11$.

  Zistili sme, že platí

  $$(S_1, \ldots, S_7) = (11, 9, 12, 13, 21, 20, 21).$$

  Odtiaľ vychádza $a_7 - a_4 = S_5 - S_4 = 8$, takže $a_4 = 1$ a $a_7 = 9$, teda z $S_2 = 9$ vyplýva $a_2 + a_3 = 8$, a preto v dôsledku $S_1 = 11$ platí $a_1 = 3$. Umiestnenie cifier 1, 3 a 9 tak poznáme, zvyšné cifry 2, 4, 5, 6, 7, 8 sú v niektorom poradí riešením sústavy rovníc

$$a_2 + a_3 = 8,$$
$$a_3 + a_5 = 11,$$
$$a_5 + a_6 = 12,$$
$$a_6 + a_8 = 11,$$
$$a_8 + a_9 = 12.$$

Vidíme, že cifra 2 je a_2, odkiaľ postupne $a_3 = 6$, $a_5 = 5$, $a_6 = 7$, $a_8 = 4$ a $a_9 = 8$. Dostali sme vyhovujúce číslo 326 157 948. Druhé vyhovujúce číslo s opačným poradím cifier je 849 751 623.

- Prípad $S_5 = 9$.

  Vtedy, ako vieme, platí $S_2 \geq 20$, a keďže $S_6 < S_5 + 9 < 20$, taktiež $S_3 \geq 20$. Vzhľadom na $S_2 \neq S_3$ tak máme $\{S_2, S_3\} = \{20, 21\}$, a preto opäť $\{S_1, S_4, S_7\} = \{11, 13, 21\}$, teda S_6 je „zvyšná" hodnota 12. Teraz z $S_5 = 9$ a $S_6 = 12$ vyplýva, že 21 sa nerovná ani S_4 ani S_7, a preto $21 = S_1$, odkiaľ $S_2 = 20$ a $S_3 = 21$. Podľa poslednej rovnosti platí $S_4 > 12$, a preto $S_4 = 13$ a $S_7 = 11$.

  Zistili sme, že platí
  $$(S_1, \ldots, S_7) = (21, 20, 21, 13, 9, 12, 11).$$
  Odtiaľ vychádza $a_3 - a_6 = S_3 - S_4 = 8$, takže $a_3 = 9$ a $a_6 = 1$, teda z $S_6 = 12$ vyplýva $a_7 + a_8 = 11$, a preto v dôsledku $S_7 = 11$ platí $a_9 = 0$, a to je spor. Žiadne vyhovujúce číslo so súčtom ???$S_5 = 9$??? preto nevyhovuje.

Pokyny:

Za časť a) sú 3 body a za časť b) tiež 3 body.

V neúplných riešeniach časti a) oceňte čiastočné kroky z vyššie popísaných postupov nasledovne:

A. Sformulovaná hypotéza o tom, že nemožno mať tri trojice so súčtom 20: 1 bod, len pokiaľ riešiteľ nevyrieši časť b), inak 0 bodov.

B1. Dve trojice so súčtom 20 nemôžu byť disjunktné (s dôkazom): 1 bod.

B2. Dve trojice so súčtom 20 nemôžu byť susedné, t. j. mať dve spoločné cifry (s dôkazom): 1 bod.

B3. Žiadna trojica so súčtom 20 nemôže susediť s trojicou so súčtom 9 ani 11 (s dôkazom): 1 bod.

Celkovo potom za neúplné riešenie časti a) dajte väčšiu z hodnôt počtu bodov za A, súčtu počtov bodov za B1 a B2 a súčtu počtov bodov za B2 a B3

Ako sme uviedli v komentári, riešenie časti b) je úplné aj v prípade, keď riešiteľ vyhovojúce číslo 849 751 623 alebo 326 157 948 uvedie bez vysvetlenia, ako k nemu prišiel. Za neúplné riešenie časti b) dajte 1 bod, ak riešiteľ napríklad dokáže, že dve trojice so súčtom 21 majú spoločnú práve jednu cifru a že trojice, ktoré s niektorou z nich susedia, majú súčet 13 alebo 20. Ak riešiteľ odvodí, ako musia vyzerať šesťciferné začiatky alebo konce všetkých vyhovujúcich čísel, dajte za časť b) 2 body.

---

2 Určte počet všetkých usporiadaných trojíc celých čísel (a, b, c) takých, že pre každé reálne číslo x platí
$$x^2 + 2x - 2023 < ax^2 + bx + c < 2x^2.$$

(Ján Mazák, Michal Rolínek)

Riešenie 1:

Ak by platilo $a < 1$, prvá zadaná nerovnosť by neplatila pre veľké hodnoty x. Podobne druhá nerovnosť vylučuje možnosť, že platí $a > 2$. Ostatné dva prípady posúdime jednotlivo:

V prípade $a = 1$ prepíšeme zadané nerovnosti na tvar
$$(b - 2)x + (c + 2023) > 0$$
a
$$x^2 - bx - c > 0.$$

V prípade $b \neq 2$ má prvá nerovnosť nenulový koeficient pri x, takže nemôže byť splnená pre všetky x, nech už je c akékoľvek. Musí preto platiť $b = 2$, a prvá nerovnosť potom prejde na $c > -2023$. Druhá nerovnosť platí pre všetky x práve vtedy, keď trojčlen $x^2 - bx - c$ s kladným koeficientom 1 pri x^2 má záporný diskriminant, teda práve vtedy, keď $b^2 + 4c < 0$. To vďaka $b = 2$ prechádza na $c < -1$. Dokopy dostávame, že v prípade $a = 1$ je platnosť oboch nerovností pre všetky x ekvivalentná s dvojicou podmienok $b = 2$ a $-1 > c > -2023$, ktoré zrejme spĺňa 2021 trojíc $(1, 2, c)$.

Analogicky budeme postupovať aj v prípade $a = 2$, len to zapíšeme stručnejšie. Prepísané nerovnosti majú tentoraz tvar

$$x^2 + (b - 2)x + (c + 2023) > 0$$

a

$$bx + c < 0.$$

Druhá nerovnosť platí pre všetky x práve vtedy, keď $b = 0$ a $c < 0$. Platnosť prvej nerovnosti pre všetky x opäť vyjadríme podmienkou záporného diskriminantu. Tento výraz $(b - 2)^2 - 4(c + 2023)$ je po dosadení $b = 0$ záporný práve vtedy, keď $c > -2022$. V prípade $a = 2$ tak vyhovujú trojice (a, b, c) také, že $b = 0$ a $0 > c > -2022$. Aj tých je zrejme 2021.

Hľadaný počet trojíc je teda $2021 + 2021$ čiže 4042.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A1. Konštatovanie, že platí $a \in \{1, 2\}$ (možno brať za zrejmý dôsledok známych vlastností kvadratickej funkcie): 2 body.

A2. Určenie b (možno brať za zrejmé) a vymedzenie c pri obidvoch lineárnych nerovnostiach: celkom 1 bod.

A3. Vymedzenie c pri dvoch kvadratických nerovnostiach: po 1 bode za každú z nich.

A4. Určenie správneho počtu trojíc: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet počtov bodov za A1, A2, A3, A4. Ak sa riešiteľ zaoberá iba prípadmi $a = 1$ a $a = 2$ a nenapíše, že to stačí, dajte najviac 4 body.

---

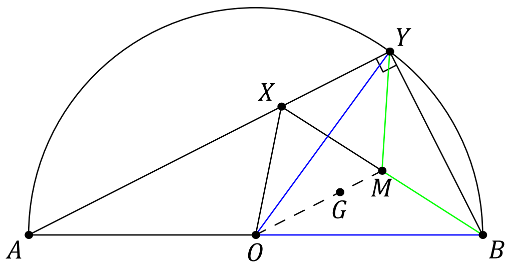
3 Vnútri polkruhu nad priemerom AB so stredom O leží bod X. Označme G ťažisko trojuholníka XOB a Y priesečník polpriamky AX s hranicou polkruhu rôzny od A. Dokážte, že $|YG| = |GB|$.

(Jiří Blažek, Jozef Tkadlec)

Riešenie 1:

Označme ešte M stred úsečky XB. Ukážeme, že ťažnica OM trojuholníka OXB leží na osi úsečky BY. (Táto hypotéza nie je taká prekvapujúca, lebo vzhľadom na zrejmú rovnosť $|OB| = |OY|$ je dokazovaná rovnosť $|GB| = |GY|$ ekvivalentná s tým, že priamka OG je osou úsečky BY.) Keďže ťažisko G tejto ťažnici patrí, bude tým rovnosť $|GB| = |GY|$ dokázaná.

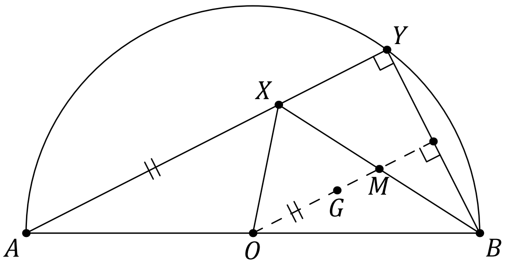
Keďže bod Y leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB so stredom O, platí $|OY| = |OB|$ a uhol AYB je pravý. Bod M je tak stredom prepony XB pravouhlého trojuholníka XBY a ako taký je aj stredom kružnice jemu opísanej. Platí tak $|MY| = |MB|$. To spolu s $|OY| = |OB|$ znamená, že oba krajné body O, M ťažnice OM ležia na osi úsečky BY. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.



Poznámka:

Podaný výklad môžeme mierne obmieňať úvahami o stredných priečkach trojuholníkov BAX, BAY alebo BXY. Ich zapojením môžeme napríklad dokazovať tieto tvrdenia (v zátvorkách naznačíme ako):

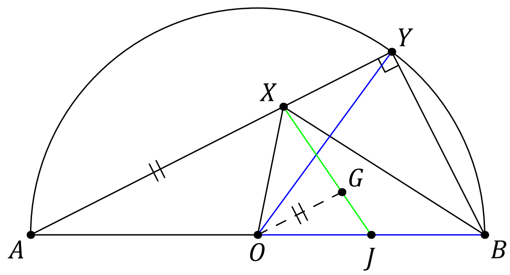
- Priamka OM (kde M je stred XB) je osou úsečky BY. (Úsečka OM je strednou priečkou trojuholníka BAX, teda $OM \parallel AX \perp BY$.)
- Os úsečky BY rozpoľuje obe úsečky AB a XB. (Stredné priečky oboch pravouhlých trojuholníkov BAY a BXY, ktoré sú rovnobežné s AY, a teda kolmé na BY, ležia na osi ich spoločnej odvesny BY.)



Riešenie 2:

Použitím druhej ťažnice XJ trojuholníka XOB, kde J je stred strany OB, ukážeme ako v prvom riešení, že úsečka OG leží na osi úsečky BY. Bod O na nej leží vďaka zrejmej rovnosti $|OB| = |OY|$, stačí teda iba overiť, že platí $OG \perp BY$, čiže $OG \parallel AY$, pretože uhol AYB je pravý podľa Tálesovej vety.

Podľa známej polohy ťažiska G na ťažnici XJ platí $|JG| = \frac{1}{3}|JX|$ a okrem toho zrejme aj $|JO| = \frac{1}{3}|JA|$. Dokopy to znamená, že úsečka OG je rovnoľahlá s úsečkou AX podľa stredu J. Platí teda $OG \parallel AX$. Tým je vzťah $OG \parallel AY$ overený, pretože X je vnútorný bod úsečky AY.



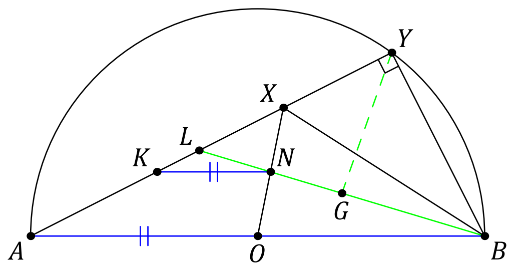
Riešenie 3:

Ukážeme, že na riešenie úlohy je možné využiť aj tretiu ťažnicu BN trojuholníka XOB, pričom N je stred jeho strany XO.

Označme ešte K stred úsečky AX a L priesečník polpriamky BN s úsečkou AX. Pre strednú priečku KN trojuholníka XAO platí $|KN| = \frac{1}{2}|AO| = \frac{1}{4}|AB|$ a $KN \parallel AO$, čiže $KN \parallel AB$. V dôsledku toho je úsečka KN obrazom úsečky AB v rovnoľahlosti so stredom L a koeficientom $1/4$. Platí tak $|LN| = \frac{1}{4}|LB|$, odkiaľ $|LN| = \frac{1}{3}|BN|$. Túto dĺžku má aj úsek NG ťažnice BN, takže dokopy dostávame

$$|LG| = |LN| + |NG| = \frac{1}{3}|BN| + \frac{1}{3}|BN| = |GB|.$$

. Všimnime si teraz trojuholník BLY. Ten má pri vrchole Y pravý uhol vďaka Tálesovej kružnici nad priemerom AB. Stred jeho prepony BL je však podľa predchádzajúceho vzťahu práve bod G, teda podľa Tálesovej vety má aj úsečka YG dĺžku $\frac{2}{3}|BN|$. Tým je rovnosť $|YG| = |GB|$ dokázaná.



Pokyny:

V neúplných postupoch podľa vzorových riešení alebo poznámky oceňte čiastočné kroky nasledovne (nové body označujeme rovnako ako v textoch riešenia):

- A. Zápis hypotézy, že na osi úsečky BY leží nielen ťažisko G, ale celá ťažnica OM: 1 bod.
- B1. Konštatovanie, že $|OB| = |OY|$: 2 body.
- B2. Dôkaz rovnosti $|MB| = |MY|$: 3 body.
- B3. Dôkaz rovnobežnosti OM a AX: 2 body.
- B4. Dôkaz kolmosti OM a BY: 3 body.
- C1. Vysvetlenie, prečo stačí dokázať $OG \perp BY$: 2 body.

C2. Dôkaz rovnobežnosti OG a AX: 2 body.

D. Dôkaz tvrdenia, že bod G je stredom úsečky BL: 4 body.

Celkovo potom dajte najväčšiu hodnotu spomedzi zo súčtu bodov za A a maxima z počtov bodov za B1, B2, B3, B4, súčtu počtu bodov za C1 a C2 a počtu bodov za D.

Slovenská komisia MO, ÚI PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Redakčná úprava: Peter Novotný, Stanislav Krajči

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže