

65. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2023/2024

1. kolo kategória B

Texty úloh

1. Družica

Organizácia pre vesmírne lety sa rozhodla umiestniť družicový modul na geostacionárnu trajektóriu okolo Zeme. Táto orbita sa vyznačuje tým, že pri pozorovaní z povrchu Zeme sa modul nachádza stále na rovnakom mieste.

- a) Uveďte, v akej rovine sa družica pohybuje a aká je jej obežná doba okolo Zeme. Určte výšku h_{GS} nad povrchom Zeme, v ktorej sa geostacionárna družica nachádza.

Najprv modul vyniesla nosná raketa na obežnú kružnicovú parkovaciu trajektóriu s výškou $h_p = 200$ km nad povrchom Zeme, a potom ho pomocou vlastných raketových motorov premiestnili na geostacionárnu orbitu. Hmotnosť modulu na parkovacej orbite $m_1 = 3,0$ t zahŕňa aj hmotnosť paliva pre raketové motory.

- b) Opíšte spôsob, ako sa môže dostať modul z parkovacej orbity na orbitu geostacionárnu.
c) Určte hmotnosť m_p paliva, ktoré sa spotrebuje pri prechode modulu z parkovacej orbity na geostacionárnu orbitu. Plyny vznikajúce spálením paliva tryskajú z dýzy motora rýchlosťou $v_r = 4\,500$ m·s⁻¹.

2. Exoplanéty

V roku 2019 získali časť Nobelovej ceny za fyziku švajčiarski astronómovia Michel Mayor a Didier Queloz za objav vôbec prvej exoplanéty 51Pegasi**b**. Podarilo sa im to už v roku 1995, na Nobelovu cenu si však museli počkať ďalších 24 rokov. Exoplanéta je všeobecne akákoľvek planéta, ktorá obieha okolo inej hviezdy ako naše Slnko. Exoplanéta 51 Pegasi-b je od nás vzdialená približne 50 svetelných rokov. Mnohé objavené exoplanéty sú extrémne veľké a obiehajú okolo svojich hviezd v pomerne malej vzdialenosti. Kvôli týmto vlastnostiam prischla takýmto objektom prezývka „horúci Jupiter“.

Pozri: <https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/7001/51-pegasi-b/>.

Uvažujme pozorovanie planéty Jupiter našej Slnčnej sústavy z veľkej vzdialenosti mimo Slnčnú sústavu ako pozorovanie exoplanéty Slnka. Obežná doba Jupitera $T_J = 11,9$ roku, hmotnosť Jupitera $M_J = 1,90 \times 10^{27}$ kg, hmotnosť Slnka $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg. Vieme, že rýchlosť pohybu Zeme po jej obežnej trajektórii $v_Z = 29,8$ km·s⁻¹. Predpokladajme, že planéty sa pohybujú po kružnicových trajektóriách.

Jupiter sledujeme pomocou spektrometra vo veľkej vzdialenosti za hranicami Slnčnej sústavy tak, že pozorovateľ sa nachádza v rovine pohybu sústavy Slnko-Jupiter.

- a) Vysvetlite, ako je možné zistiť existenciu exoplanéty na základe pozorovania svetla hviezd pomocou spektrometra.
b) Určte najmenšiu rozlišovaciu schopnosť spektrometra R_{\min} , ktorý umožní objaviť pri hviezde s vlastnosťami Slnka existenciu ťažkej exoplanéty s vlastnosťami Jupitera. Rýchlosť svetla $c = 2,99 \times 10^8$ m·s⁻¹.

Poznámka 1: Rozlišovacia schopnosť spektrometra je jeho schopnosť rozlíšiť dve žiarenia (svetlo), ktorých vlnová dĺžka λ sa líši len o malú hodnotu $\Delta\lambda$. Je charakterizovaná bezrozmerným parametrom

$R = \lambda/\Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda$ je najmenší rozdiel vlnových dĺžok dvoch spektrálnych čiar, ktoré ešte spektrometer rozlíši, λ je stredná (priemerná) vlnová dĺžka dvoch rozlíšiteľných čiar.

Poznámka 2: Svetlo exoplanéty je príliš slabé na pozorovanie z veľkej vzdialenosti. Na existenciu exoplanéty sa usudzuje z pozorovania svetla hviezdy, napr. periodickej zmeny jasnosti alebo vlnovej dĺžky svetla vyžarovaného hviezdou v dôsledku obiehania exoplanéty.

Pozri: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1>.

3. Tepelný dej

V laboratóriu robili pokusy s dusíkom, ktorý bol uzatvorený vo valci s pohyblivým piestom. Chceli zistiť, či a za akých podmienok možno dosiahnuť závislosť tlaku od teploty

$$(1) \quad p = \frac{4}{5} p_0 \left(1 + \frac{T^2}{4T_0^2} \right).$$

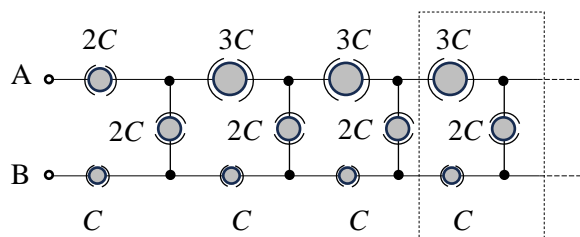
Teplotu menili z hodnoty $T_0 = 100$ K do hodnoty $T_1 = 500$ K. Začiatková hodnota tlaku bola $p_0 = 50$ kPa.

- Vyjadrite hustotu ρ plynu ako funkciu relatívnej teploty $x = T/T_0$ za predpokladu, že platí (1). Zostrojte graf funkcie $\rho = f(x)$. Určte vhodným spôsobom najmenšiu hustotu ρ_m plynu počas zmeny teploty z hodnoty T_0 na hodnotu T_1 a teplotu T_m , pri ktorej sa táto hodnota hustoty dosiahne.
- Určte závislosť relatívneho objemu plynu $y = V/V_0$ od relatívnej teploty x tak, aby sa dosiahla požadovaná teplotná závislosť tlaku. Závislosť $y = g(x)$ znázorníte pomocou y - x diagramu.
- Vyjadrite závislosť relatívneho tlaku $z = p/p_0$ plynu od relatívneho objemu y a výslednú funkciu $z = h(y)$ znázorníte graficky v z - y diagrame. .

Molárna hmotnosť dusíka $M_m = 28$ g·mol⁻¹, molárna plynová konštanta $R = 8,3$ J·K⁻¹·mol⁻¹. Plyn považujte za ideálny.

4. Kapacita retiazky

Na obr. B-1 je retiazka vytvorená z drobných guľôčok zasadených do striebra. Guľôčky sú z polodrahokamu a sú elektricky nevodivé. Každá guľôčka v uchytení v striebre predstavuje malý kondenzátor. Kapacity jednotlivých kondenzátorov sú označené v obrázku, pričom $C = 5,0$ pF.



Obr. B-1

Retiazka je veľmi dlhá a opakuje sa v nej základná bunka označená čiarkovaným boxom.

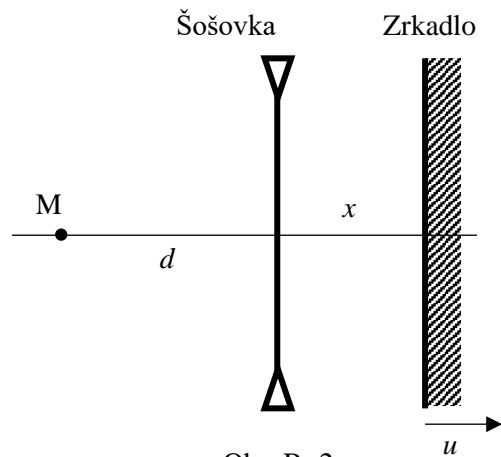
Určte kapacitu C_{AB} retiazky vzhľadom na koncové body A a B.

Pri riešení pre zjednodušenie predpokladajte, že retiazka je nekonečne dlhá.

5. Mravec

Na optickej osi tenkej rozptylky s ohniskovou vzdialenosťou $f = -30$ cm sa nachádza mravec M. Vzdialenosť mravca od stredu šošovky $d = 45$ cm. Za šošovkou sa nachádza rovinné zrkadlo, obr. B-2.

Zo začiatkovej polohy zrkadla tesne za šošovkou sa zrkadlo začne pohybovať v smere optickej osi rýchlosťou $u = 35 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

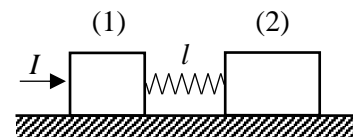


- Určte vzdialenosť a_0 obrazu mravca od šošovky, ak je zrkadlo tesne pri šošovke. Uveďte, v ktorej časti priestoru sa obraz nachádza a aké má vlastnosti. Vo vhodnej mierke nakreslite sústavu šošovky a zrkadla a zostrojte obraz M' mravca. Konštrukciu stručne opíšte.
- Určte vzdialenosť a od šošovky obrazu M'' mravca vytvoreného sústavou šošovky a zrkadla a rýchlosť v pohybu obrazu M'' ako funkciu času t od začiatku pohybu zrkadla.
- Do obrázku sústavy šošovky a zrkadla v čase $t_1 = 10$ s zostrojte obraz M'' mravca. Určte vzdialenosť y_1 obrazu M'' od šošovky a rýchlosť v_1 pohybu obrazu M'' v čase t_1 výpočtom a hodnotu y_1 určenú výpočtom porovnajte s hodnotou získanou z obrázku sústavy.

6. Telesá spojené pružinou

Na vodorovnej podložke ležia dva hranoly (1) a (2) s hmotnosťami m_1 a m_2 spojené ľahkou pružinou s tuhosťou k , obr. B-3. Faktor trenia medzi hranolmi a podložkou je f .

Na začiatku nedeformovaná pružina má dĺžku ℓ_0 a pri úplnom stlačení dĺžku ℓ_{\min} . Pri stlačení na minimálnu dĺžku ℓ_{\min} pružina predstavuje tuhý valec.



V určitom okamihu udelíme telesu (1) veľmi krátkym úderom impulz sily I v smere spojnice s telesom (2).

- Určte maximálnu hodnotu I_1 impulzu sily I , pri ktorej sa teleso (2) na podložke nepohne.
- Telesu (1) udelíme impulz sily s veľkosťou I_1 . Určte minimálnu hodnotu ℓ_1 dĺžky pružiny a maximálnu hodnotu ℓ_2 dĺžky pružiny počas pohybu telesa (1).
- Po všeobecnej analýze uveďte výsledky častí a) a b) pre $m_1 = 0,15$ kg a $m_2 = 0,50$ kg, $k = 90 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\ell_0 = 25,0$ mm, $\ell_{\min} = 5,0$ mm, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a tri rôzne prípady faktoru trenia: $f_1 = 0,20$; $f_2 = 0,40$; $f_3 = 0,80$.

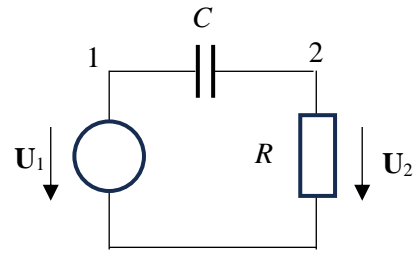
7. Prenosová charakteristika RC obvodu

Na obr. B–4 je schéma RC elektrického obvodu striedavého prúdu, ktorý pozostáva z rezistora s odporom R a kapacitora s kapacitou C .

Úlohou je meranie napät'ovej amplitúdovej a fázovej prenosovej charakteristiky obvodu

$$A_{U_{dB}}\left(\frac{f}{f_0}\right) = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \quad \text{a} \quad \varphi_U\left(\frac{f}{f_0}\right) = \varphi_2 - \varphi_1,$$

kde $A_{U_{dB}}$ je amplitúdová prenosová charakteristika vyjadrená v decibeloch a charakteristická frekvencia f_0 je frekvencia, pri ktorej $A_{U_{dB}} = -3$ dB.



Obr. B–4

- a) S použitím komplexnej symbolickej metódy odvodte vzťahy pre napät'ovú amplitúdovú a fázovú prenosovú charakteristiku obvodu.

Určte charakteristickú frekvenciu f_0 a zostrojte grafy charakteristík v súradniciach $A_{U_{dB}} - \log(f/f_0)$

a $\varphi_U - \log(f/f_0)$ v rozsahu $0,1 < \frac{f}{f_0} < 10$.

- b) Vyjadrite vzťahy pre určenie charakteristík A_U a φ_U pomocou zmeraných napätí U_2 a $U_{12} = U_C$.
Pre 20 rôznych frekvencií z rozsahu $0,1 < f/f_0 < 10$ zmerajte dvojicu napätí U_2 , U_{12} , merania zaznamenajte do tabuľky a pre každú dvojicu určte hodnoty $A_{U_{dB}}$ a φ_U . Hodnoty vyznačte do grafu z časti a) a porovnajte ich s teoretickou krivkou.

Pozn.: Odporúčame použiť hodnoty R a C , pre ktoré je f_0 približne 1 kHz pre meranie v rozsahu od 100 Hz do 10 kHz (generátory bežné v školských laboratóriách).

Pomôcky: Vhodný rezistor a kapacitor s hodnotami zodpovedajúcimi zvolenej charakteristickej frekvencii f_0 (odporúčame C rádovo 10^{-7} F a R rádovo 10^3 Ω), laditeľný generátor striedavého napätia, multimeter.