

**65. ročník Fyzikálnej olympiády**  
v školskom roku 2023/2024  
**domáce kolo kategória A**  
*Riešenie úloh*

**1. Štart rakety**

*Riešenie:*

- a) Plyn vytvorený spáleným palivom je veľkou rýchlosťou emitovaný z dýzy motora. Na základe zákona zachovania hybnosti je hybnosť emitovaného paliva rovná hybnosti odovzdanej rakete. Plynulá emisia plynov tak vytvára ťahovú silu raketového motora, ktorá rakete udeľuje zrýchlenie. Keďže hmotnosť rakety klesá o spálené palivo, ale ťahová sila zostáva rovnaká (výtoková rýchlosť sa nemení, ani množstvo paliva za jednotku času), zrýchlenie pri danej sile rastie. 2 b
- b) Tiaž prístroja rastie v dôsledku zrýchlenia rakety

$$G_2 = m_p g + m_p a_2 = k_2 m_p g .$$

Zrýchlenie rakety v čase  $t_2$

$$a_2 = (k_2 - 1) g \approx 3,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} . \quad \text{1 b}$$

Ak označíme  $m_0$  hmotnosť rakety s palivom pri štarte a  $\mu$  rýchlosť spotreby paliva, v čase  $t_2$  je hmotnosť rakety  $m_2 = m_0 - \mu t_2$ .

Ak označíme  $F$  ťahovú silu motora

$$F = - \frac{u \, dm}{dt} = u \mu .$$

Zrýchlenie je potom 
$$a_2 = \frac{F}{m_2} - g = \frac{u \mu}{m_0 - \mu t_2} - g = (k_2 - 1) g .$$

Podobne pre čas  $t_1$  máme 
$$a_1 = \frac{F}{m_1} - g = \frac{u \mu}{m_0 - \mu t_1} - g = (k_1 - 1) g .$$

Z oboch vzťahov pre zrýchlenie určíme výtokovú rýchlosť

$$u = \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} g (t_2 - t_1) \approx 1 \, 680 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} . \quad \text{3 b}$$

Rýchlosť rakety

$$v_2 = \int_0^{t_2} a \, dt = \int_0^{t_2} \left( \frac{u \mu}{m_0 - \mu t} - g \right) dt = - \int_0^{t_2} \left( \frac{u}{t - \frac{m_0}{\mu}} + g \right) dt = -u \ln \left( \frac{t_2 - \frac{m_0}{\mu}}{-\frac{m_0}{\mu}} \right) - g t_2 .$$

Zo vzťahu pre zrýchlenie  $a_1$  dostávame

$$\frac{\mu}{m_0} = \frac{k_1 g}{u + k_1 g t_1} \approx 6,7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} .$$

Po dosadení a úprave je

$$\begin{aligned} v_2 &= u \ln \left( 1 - \frac{\mu}{m_0} t_2 \right)^{-1} - g t_2 = g (t_2 - t_1) \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \ln \left( 1 - \frac{k_1 g}{u + k_1 g t_1} t_2 \right)^{-1} - g t_2 = \\ &= g (t_2 - t_1) \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \ln \left( \frac{k_2 t_2 + k_1 t_1}{k_1 (t_2 - t_1)} \right) - g t_2 . \end{aligned}$$

Pre dané hodnoty  $v_2 \approx 75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

4 b

## 2. Pohyb tyče

Riešenie:

- a) Po vychýlení do začiatkovej polohy pôsobí na tyč moment tiažovej sily, ktorý tyč vracia do vodorovnej polohy. Tým získa kinetickú energiu a z vodorovnej polohy sa ďalej otáča okolo druhej hrany dosky až do maximálnej výchylky, ktorá je vzhľadom na symetriu rovnaká  $\varphi_0$  ako na začiatku. Potom pokračuje pohyb tyče rovnako v opačnom smere až do začiatkovej polohy.

2 b

- b) Pohybová rovnica tyče

$$J \varepsilon = M, \quad 1 \text{ b}$$

kde  $J = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2$  je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os otáčania,  $\varepsilon$  uhlové zrýchlenie a  $M = mg \frac{d}{2} \cos \varphi \approx mg \frac{d}{2}$ .

Tyč sa pohybuje rovnomerne zrýchleným otáčavým pohybom s uhlovým zrýchlením

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{mg \frac{d}{2}}{\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{6gd}{L^2 + 3d^2}. \quad 2 \text{ b}$$

Pre uhol otočenia máme

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad \text{pre } \varphi \leq \varphi_0. \quad 2 \text{ b}$$

Vodorovnú polohu tyč dosiahne za dobu

$$t_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varphi_0}{3gd}(L^2 + 3d^2)}.$$

Za rovnaký čas sa tyč vychýli o uhol  $\varphi_0$  na druhú stranu, potom nazad do vodorovnej polohy a nakoniec do začiatkovej polohy. Celkový čas pohybu

$$T = 4t_0 = 4\sqrt{\frac{\varphi_0}{3gd}(L^2 + 3d^2)} \approx 0,59 \text{ s}. \quad 3 \text{ b}$$

## 3. Tepelné čerpadlo

Riešenie:

- a) Plyn prijíma teplo počas deja 2–3

$$Q_1 = C_p (T_3 - T_2),$$

kde  $T_3 = T_1$ ,  $T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} T_1$  a  $C_p = \left(\frac{s}{2} + 1\right) n R$ , pričom  $s = 3$ .

Prijaté teplo je

$$Q_1 = \left(\frac{s}{2} + 1\right) n R T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] = \left(\frac{s}{2} + 1\right) n R T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{s+2}}\right] \approx 4,43 \text{ kJ}. \quad 2 \text{ b}$$

Plyn teplo odovzdáva počas izotermického deja 3–1

$$Q_2 = -W_{31} = -\int_{V_3}^{V_1} p dV = -\int_{V_3}^{V_1} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_1},$$

pričom a  $\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$ .

Odovzdaní teplo

$$Q_2 = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \approx 5,48 \text{ kJ.} \quad 2 \text{ b}$$

b) Práca pri adiabatickom deji je rovná zmene vnútornej energie

$$W_{12} = -C_V (T_2 - T_1) = -\frac{s}{2} nRT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{s+2}} - 1 \right] \approx 2,66 \text{ kJ.} \quad 2 \text{ b}$$

Celková zmena vnútornej energie plynu počas uzatvoreného cyklu je rovná nule. Preto celková energia

$$W = Q_2 - Q_1 = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} - \left( \frac{s}{2} + 1 \right) nRT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{s+2}} \right] \approx 1,05 \text{ kJ.} \quad 2 \text{ b}$$

Pozn.: Pri deji 1-2 plyn koná kladnú prácu, tzn. práca vonkajšej sily je záporná.

c) Efektivita čerpadla

$$\eta = \frac{P_Q}{P} = \frac{Q_2}{W} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{p_1}{p_2} - \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{s+2}} \right]} \approx 5,22. \quad 2 \text{ b}$$

#### 4. Kocka kondenzátorov

Riešenie:

a) Keďže majú všetky kondenzátory rovnakú kapacitu, existujú iba tri možnosti:

Prvá zodpovedá pripojeniu zdroja k telesovej uhlopriečke 0-7, alebo 3-5, 1-6, 2-4.

Druhá zodpovedá pripojeniu k stenovej uhlopriečke, napr. 0-6, 2-3, 0-4, atď.

Tretia zodpovedá pripojeniu k susedným uzlom, napr. 0-3, 0-2, 0-1, 4-7, atď. 2 b

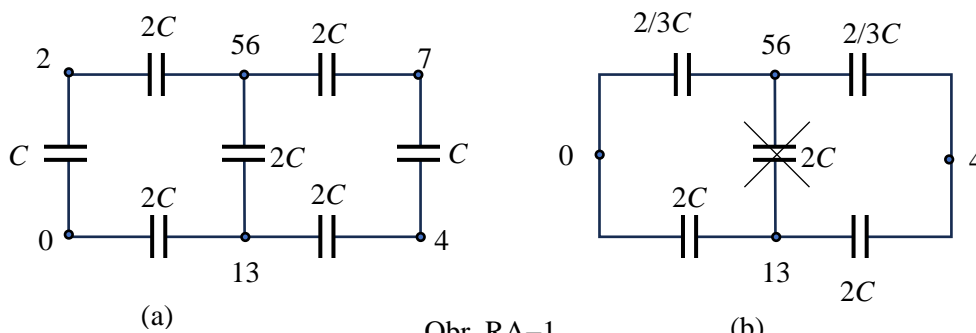
b) Prvý prípad zodpovedá pripojeniu k uzlom 0 a 7. Uzly 1, 3, 2 sú ekvipotenciálne a možno ich teda vzájomne spojiť. Tým budú kondenzátory  $C_{01}$ ,  $C_{02}$  a  $C_{03}$  spojené paralelne s celkovou kapacitou  $3C$ . To isté platí pre uzly 4, 5, 6. Medzi ekvipotenciálnymi plochami 123 a 456 je paralelne zapojených 6 kondenzátorov s celkovou kapacitou  $6C$ . Výsledná kapacita zodpovedá sériovému zapojeniu kapacít  $3C$ ,  $6C$  a  $3C$

$$\frac{1}{C_{07}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C}, \text{ a teda } C_{07} = 1,20 C. \quad 2 \text{ b}$$

Druhý prípad zodpovedá pripojeniu k uzlom 0 a 4. Kocka je v tomto prípade symetrická okolo roviny 0472. Ekvipotenciálne uzly sú 1 a 3 a rovnako 5 a 6. Príslušné uzly tak môžeme spojiť. Dostávame tak planárny obvod, obr. RA-1 (a). Môžeme ho upraviť na tvar (b). Po pripojení zdroja

k svorkám 0 a 4 sú uzly 13 a 56 ekvipotenciálne, a možno ich teda vodivo spojiť. Dostávame potom sériové spojenie dvoch paralelných dvojíc  $2/3 C$  a  $2C$ .

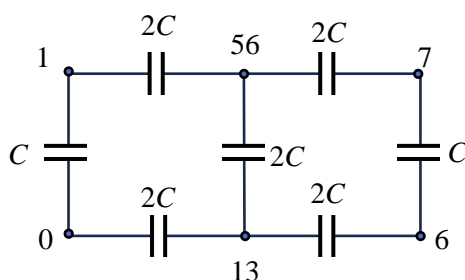
Výsledná kapacita  $C_{04} = \frac{4}{3}C \approx 1,33 C$ .



Obr. RA-1

3 b

Tretí prípad zodpovedá pripojeniu k uzlom 0 a 1. Ekvipotenciálne sú uzly 2 a 3 a taktiež 4 a 5. Po ich spojení dostávame planárnu štruktúru, obr. RA-2.



Obr. RA-2

Výsledná kapacita

$$C_{01} = \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} \right)^{-1} + 2C \right]^{-1} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{2C} \right\}^{-1} + C = \frac{12C}{7} \approx 1,71 C. \quad 3 b$$

## 5. Gulôčka s nábojom v magnetickom poli

Riešenie:

a) Urýchlenie častíc

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU, \text{ odkiaľ } v = \sqrt{2 \frac{q}{m}U} = \sqrt{2 \gamma U}. \quad (1) \quad 1 b$$

Ak vnikne častica do magnetického poľa, pohybuje sa v rovine kolmej na smer magnetickej indukcie. V homogénnom poli ide o pohyb po oblúku kružnice. Pohybová rovnice je

$$m \frac{v^2}{R} = qvB,$$

odkiaľ dostávame polomer kružnice

$$R = \frac{m}{q} \frac{v}{B} = \frac{v}{\gamma B}. \quad (2) \quad 1 \text{ b}$$

Ak má prejsť častica na tienidlo, musí sa aspoň raz odraziť od steny, obr. RA-3.

Pre jeden odraz platí

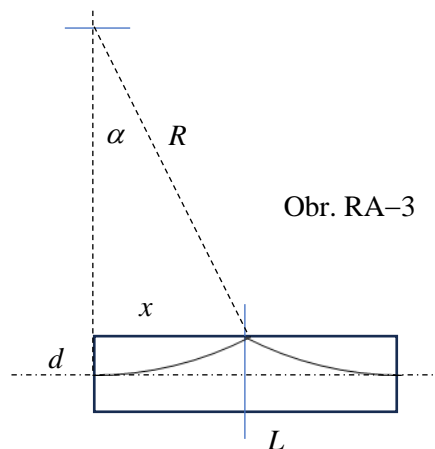
$$R \sin \alpha = \frac{L}{2} \text{ a } \frac{d}{2} = R(1 - \cos \alpha).$$

Po vylúčení  $\alpha$  dostávame

$$\frac{d}{2} = R \left( 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right) = R \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2R} \right)^2} \right)$$

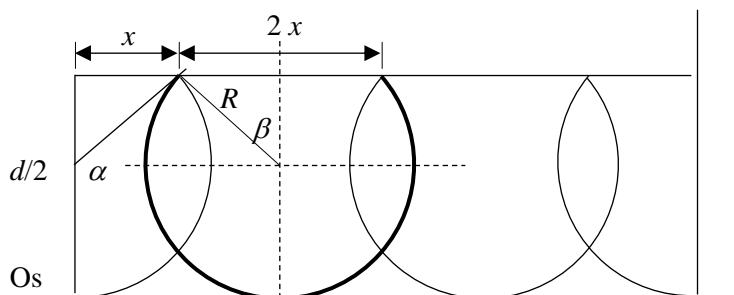
a ďalej

$$R = \frac{d^2 + L^2}{4d} \approx 21 \text{ cm.}$$



Obr. RA-3

Pri klesajúcom napätí urýchľovača, a teda aj polomeru  $R$ , sa zväčšuje uhol  $\alpha$ . Situáciu pre  $\alpha > \pi/2$  nasledujúci znázorňuje obr. RA-4.



Obr. RA-4

Pre dĺžku plátí  $L = 2 n x$ , kde  $n$  je počet odrazov častice od steny valca.

Pre hodnotu  $x$  určíme polomer trajektórie častice

$$x = R \sin \beta, \text{ pričom } \frac{d}{2} = R + R \cos \beta,$$

odkiaľ

$$R = \frac{d^2 + 4x^2}{4d}, \text{ kde } x = \frac{L}{2n}. \quad (3)$$

Odtiaľ máme

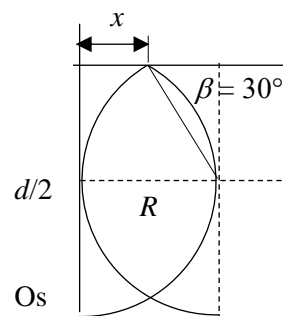
$$R = \frac{d^2 + \frac{L^2}{n^2}}{4d} = \frac{v_n}{\gamma B} = \frac{\sqrt{2 \gamma U_n}}{\gamma B} \text{ a}$$

$$U_n = \left( \frac{n^2 d^2 + L^2}{4n^2 d} \right)^2 \frac{\gamma B^2}{2}. \quad 3 \text{ b}$$

- b) Maximálna hodnota napätia je pre  $n = 1$ . V tomto prípade je polomer  $R$  maximálny, a tak maximálna je hodnota rýchlosti  $v$  a tým aj napätia  $U$

$$U_{\max} = U_1 = \left( \frac{d^2 + L^2}{4d} \right)^2 \frac{\gamma B^2}{2} \approx 45,2 \text{ V.} \quad 1 \text{ b}$$

Maximálny počet odrazov, resp. minimálny polomer trajektórie, je daný podmienkou  $2x = R$ , kedy sa v prvom oblúku častica priblíži tesne k vodivej strane, obr. RA-5.



Obr. RA-5

Z (3) dostaneme

$$x = R \sin \beta = \frac{R}{2}, \text{ odtiaľ } \beta = 30^\circ, \text{ a teda}$$

$$\frac{d}{2} = R(1 + \cos \alpha) = R \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{d}{2 + \sqrt{3}} = R = \frac{v}{\gamma B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U_N}{\gamma}}$$

Minimálna hodnoty napätia

$$U_{\min} = U_N = \left( \frac{d}{2 + \sqrt{3}} \right)^2 \frac{\gamma B^2}{2} \approx 183 \text{ mV}, \quad 2 \text{ b}$$

pričom  $x_N = \frac{L}{2N} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \frac{d}{2 + \sqrt{3}}$  a odkiaľ  $N = \frac{L}{d} (2 + \sqrt{3}) \approx 14$

c) Dĺžka jedného oblúka

$$s_n = (2\pi - 2\alpha) R_n = v \frac{t_n}{n}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{R} = \frac{2ndL}{n^2d^2 + L^2}$$

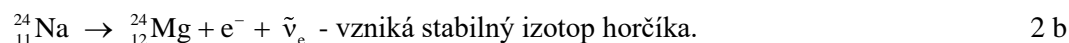
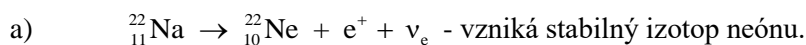
$$t_n = 2n(\pi - \alpha) \frac{1}{\gamma B} = 2n \left( \pi - \arcsin \frac{2ndL}{n^2d^2 + L^2} \right) \frac{1}{\gamma B}$$

Pre  $n = 1$ :  $t_1 \approx 26,5 \text{ ms}$  1 b

pre  $n = 14$ :  $t_{14} \approx 362 \text{ ms}$ . 1 b

## 6. Objem krvi v tele

Riešenie:



b) Pre frekvenciu a hmotnosť fotónu platí

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}, \text{ odkiaľ máme } \lambda = \frac{hc}{E_\gamma} \approx 4,5 \times 10^{-13} \text{ m}. \quad 2 \text{ b}$$

Kinetická energia elektrónu

$$E_k = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m \right) c^2, \text{ kde } m \text{ je pokojová hmotnosť elektrónu,}$$

odkiaľ určíme rýchlosť elektrónu

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_k}{mc^2}\right)^2}} \approx 0,96 c \approx 2,89 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

c) Pre rádioaktívnu vzorku platí zákon premeny

$$N = N_1 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Aktivita vzorky v čase  $t = 0$

$$A_1 = -\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\ln 2}{T} N_1.$$

Počet rádioaktívnych iónov  $^{24}\text{Na}^+$

$$N_1 = \frac{T}{\ln 2} A_1 \quad \text{ich koncentrácia je}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{V_1} = \frac{T}{\ln 2} \frac{A_1}{V_1} \approx 7,8 \times 10^7 \text{ ml}^{-1}. \quad 2 \text{ b}$$

d) Roztok sa rozptýli do celého objemu krvi, čo znamená pokles koncentrácie RA iónov, a zároveň klesne počet RA iónov v dôsledku premeny. Výsledná koncentrácia

$$n_k = n_1 \frac{V_1}{V_k} e^{-\frac{\ln 2}{T} t_2}.$$

Aktivita vzorky krvi s objemom  $V_2$  je

$$A_2 = \frac{\ln 2}{T} n_k V_2 = n_1 V_2 \frac{V_1}{V_k} \frac{\ln 2}{T} e^{-\frac{\ln 2}{T} t_2} = \frac{V_2}{V_k} A_1 e^{-\frac{\ln 2}{T} t_2},$$

odkiaľ dostávame

$$V_k = V_2 \frac{A_1}{A_2} e^{-\frac{\ln 2}{T} t_2} \approx 5,95 \times 10^3 \text{ cm}^3 \approx 6,0 \text{ l}. \quad 2 \text{ b}$$

## 7. Meranie indukčnosti cievky – experimentálna úloha

Riešenie:

- a) Odpor sa určí z podielu konštantného napätia a prúdu  $R_s = U_{C0}/I_{Z0}$  pre  $f = 0$  Hz.

Pri frekvencii  $f > 0$  Hz je impedancia  $Z_C = \sqrt{R_s^2 + (\omega L)^2}$ , a teda

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_C}{I_Z}\right)^2 - \left(\frac{U_{C0}}{I_{Z0}}\right)^2}.$$

- b) Situáciu v druhom prípade znázorňuje vektorový diagram, obr. RA-6. Napätia na rezistoroch sú v smere prúdu a napätie na induktore je kolmé na prúd. Skladaním elementárnych napätí dostávame trojuholník nameraných napätí.

Úlohu možno riešiť graficky pomocou tohto diagramu alebo výpočtom podľa vzťahu, ktorý z tohto diagramu vychádza.

Použitím kosínusovej vety na trojuholník ABC dostávame

$$U_C^2 = U_Z^2 + U_R^2 - 2U_Z U_R \cos \varphi.$$

Napätie na induktore

$$U_L = U_Z \sin \varphi.$$

Po vylúčení uhlu  $\varphi$  dostávame

$$U_C^2 = U_Z^2 + U_R^2 - 2U_Z U_R \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = U_Z^2 + U_R^2 - 2U_Z U_R \sqrt{1 - \frac{U_L^2}{U_Z^2}}$$

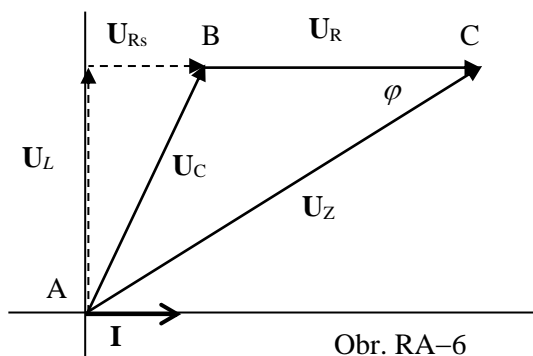
a po úprave

$$U_L = \frac{\sqrt{4U_Z^2 U_R^2 - (U_Z^2 + U_R^2 - U_C^2)^2}}{2U_R} = \omega L \frac{U_R}{R},$$

a ďalej

$$L = \frac{R}{\omega} \frac{\sqrt{4U_Z^2 U_R^2 - (U_Z^2 + U_R^2 - U_C^2)^2}}{2U_R^2}$$

$$a) \quad R_s = R \frac{\sqrt{4U_C^2 U_R^2 - 4U_Z^2 U_R^2 + (U_Z^2 + U_R^2 - U_C^2)^2}}{2U_R^2}.$$



Obr. RA-6

Spolu za experiment max. 10 b



