65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
Domáce kolo kategória E
Riešenie úloh

1) Závažie v nádobe

Riešenie:

a) Tiaž nádoby so závažím je $G = G_\mathrm{n} + G_z$.
Ak nádoba pláva, tiaž vytlačenej vody je rovnaká a platí $G = \rho\ g\ a\ b\ d$.
Odtiaľ dostávame

$$d = \frac{G_\mathrm{n}+G_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{v} g\ a\ b} \approx \frac{700\ \mathrm{N}}{\left(1\,000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)(0{,}600\ \mathrm{m})(0{,}900\ \mathrm{m})} \approx 132\ \mathrm{mm}.$$ 3 body

b) V tomto prípade je tiaž, ktorá pôsobí na nádobu, rovná tiaži G_n vlastnej nádoby a tiaži G_z závažia ponoreného vo vode. Závažie je nadľahčené vztlakovou silou F_vz

$$F_\mathrm{vz} = V_\mathrm{z}\ \rho_\mathrm{v}\ g = \frac{G_\mathrm{z}}{\rho\ g}\ \rho_\mathrm{v}\ g = G_\mathrm{z}\ \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho} = (200\ \mathrm{N})\ \frac{1\,000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{8\,000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 25\ \mathrm{N}.$$ 2 body

Podľa Archimedovho zákona $G_\mathrm{n} + G_z - F_\mathrm{vz} = \rho_\mathrm{v}\ g\ a\ b\ d'$.
Odtiaľ dostávame

$$d' = \frac{G_\mathrm{n}+G_\mathrm{z}-F_\mathrm{vz}}{\rho_\mathrm{v}\ g\ a\ b} = \frac{675\ \mathrm{N}}{\left(1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)(0{,}600\ \mathrm{m})(0{,}900\ \mathrm{m})} \approx 127\ \mathrm{mm}.$$ 3 body

c) Z predchádzajúcich častí vidíme, že nádoba sa ponorí hlbšie v prípade a), tzn. keď závažie dávame do nádoby. Najmenšia tiaž G_z', pri ktorej sa nádoba ponorí až do hĺbky c spĺňa podmienku

$$c = \frac{G_\mathrm{n}+G_\mathrm{z}'}{\rho_\mathrm{v}\ g\ a\ b}\ ,$$

a teda

$$G_z' = \rho_\mathrm{v} g\ abc - G_\mathrm{n} \approx \left(1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)(0{,}6\ \mathrm{m})(0{,}9\ \mathrm{m})(0{,}35\ \mathrm{m}) - 500\ \mathrm{N} \approx 1354\ \mathrm{N}.$$

2 body

2) Kovová podložka

Riešenie:

a) Do vyrovnania teplôt na hodnote t_a, odovzdajú miska a polievka podložke teplo $Q_{1\mathrm{a}}$ a podložka prevezme rovnaké teplo $Q_{2\mathrm{a}}$, odkiaľ máme

$$Q_{1\mathrm{a}} = (m_\mathrm{p} c_\mathrm{p} + m_\mathrm{m} c)(t_\mathrm{p} - t_\mathrm{a}) = Mc\ (t_\mathrm{a} - t_0) = Q_{2\mathrm{a}}.$$

Riešením rovnice je

$$t_\mathrm{a} = \frac{(m_\mathrm{p} c_\mathrm{p} + m_\mathrm{m} c)\ t_\mathrm{p} + M\ c\ t_0}{m_\mathrm{p} c_\mathrm{p} + m_\mathrm{m} c + M\ c} \approx\ 64{,}3\ °\mathrm{C}.$$ 3 body

b) Podložka by pri úplnom vyrovnaní teplôt prevzala teplo Q_{2a}

$$Q_{2\mathrm{a}} = Mc(t_\mathrm{a} - t_0).$$

K úplnému vyrovnaniu však nedôjde, lebo podložka prevezme len polovicu tepla

$$Q_{2\mathrm{b}} = \frac{1}{2} Q_{2\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\ Mc(t_\mathrm{a} - t_0).$$

Teplota podložky sa zvýši z t_0 na t_b v dôsledku prijatia tohto tepla, teda

$$Q_{2\mathrm{b}} = Mc(t_\mathrm{b} - t_0) = \frac{1}{2} Mc(t_\mathrm{a} - t_0),$$

odkiaľ

$t_{\mathrm{b}} = \frac{Mc(t_{\mathrm{a}} - t_0)}{2Mc} + t_0 = \frac{t_{\mathrm{a}} + t_0}{2} = 42{,}2\ °\mathrm{C}.$ 3 body

Vypočítame teplotu t_{c}, na ktorú sa zohreje podložka po druhej miske. Keby sa vyrovnali teploty medzi druhou miskou a podložkou so začiatočnou teplotou t_{b},výsledná teplota by bola

$$t_{\mathrm{c1}} = \frac{(m_{\mathrm{p}}c_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}c)t_{\mathrm{p}} + Mct_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{p}}c_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}c + Mc} = 70{,}0\ °\mathrm{C}$$

a miska by prijala teplo

$$Q_{\mathrm{c1}} = Mc(t_{\mathrm{c1}} - t_{\mathrm{b}}) = 11{,}7\ \mathrm{kJ}.$$

V skutočnosti však prijme len polovicu tohto tepla, preto teplotu t_{c} podložky po druhej miske vypočítame zo vzťahu

$$Q_{\mathrm{c2}} = Mc(t_{\mathrm{c2}} - t_{\mathrm{b}}) = \frac{1}{2}Q_{\mathrm{c1}}$$

a odtiaľ dostávame

$$t_{\mathrm{c2}} = \frac{Q_{\mathrm{c2}}}{M\,c} + t_{\mathrm{b}} = \frac{Mc(t_{\mathrm{c1}} - t_{\mathrm{b}})}{2\,M\,c} + t_{\mathrm{b}} = \frac{t_{\mathrm{c1}} + t_{\mathrm{b}}}{2} \approx 56{,}1\ °\mathrm{C}\ .$$

Keby sa teplota tretej misky a podložky vyrovnali, vyrovnali by sa na teplote

$$t_{\mathrm{c3}} = \frac{(m_{\mathrm{p}}c_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}c)t_{\mathrm{p}} + Mct_{\mathrm{c2}}}{m_{\mathrm{p}}c_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}}c + Mc} \approx 73{,}7\ °\mathrm{C}$$

a podložka by prijala teplo

$$Q_{\mathrm{c3}} = Mc(t_{\mathrm{c3}} - t_{\mathrm{c2}}) \approx 7{,}39\ \mathrm{kJ}.$$

V skutočnosti odovzdá tretia miska iba polovicu tohto tepla, tzn. $Q_c \approx 3{,}70$ kJ. 3 body

d) Teplota sa každou miskou zvyšuje a blíži sa k teplote horúcej misky s polievkou

$$t_{\mathrm{p}} = 80{,}0\ °\mathrm{C}.$$ 1 bod

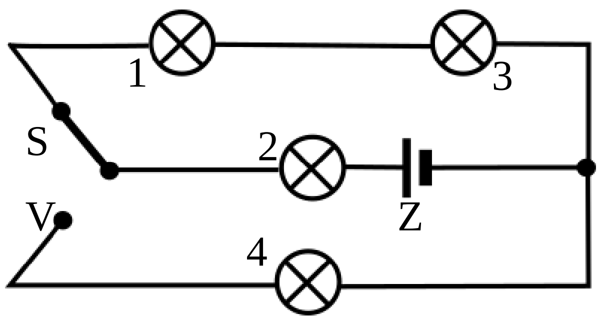
3) Signalizácia

Riešenie:

a) Funkčná schéma podľa zadania vrátane požadovaného označenia. 5 bodov

b) Celkový odpor žiaroviek 1 a 3 musí byť rovný odporu žiarovky 4. Ak odpor žiarovky n označíme R_n, potom

$$R_4 = R_1 + R_3.$$ 5 bodov



Obr. RE–1

4) Archimédov zákon na Marse

Riešenie:

a) Do vody je ponorená časť kocky s objemom

$$V = a^2(a - h).$$

Podľa Archimedovho zákona na kocku pôsobí vztlaková sila

$$F_Z = V\rho g_Z \approx 1{,}13\ \text{N}.$$ 2 body

b) Hmotnosť kocky sa rovná hmotnosti vytlačenej vody, t.j.

$$M = \rho V \approx 115\ \text{g} = 0{,}115\ \text{kg}.$$ 3 body

c) Nakoľko je ponorená časť, a tým vytlačené množstvo vody, rovnaké ako v časti a), ale líši sa gravitačná konštanta, vztlaková sila je

$$F_M = V\rho g_M \approx 0{,}427\ \text{N}.$$ 2 body

d) Kocka bude plávať rovnako ako na Zemi, lebo nielen vztlaková sila je úmerná gravitačnej konštante, ale tiež vlastná tiaž kocky a uvedená tlaková sila F_M sa rovná tiaži kocky na Marse.

3 body

5) Formuľa 1 – Monako

Riešenie:

a) Zo zadania vyplýva, že najrýchlejšie prejde pretekár okruh na pneumatikách typu S. Najkratší čas tak zodpovedá najväčšej rýchlosti. Pre čas t_F = 1 min 15,650 s = 75,650 s je najväčšia rýchlosť na pneumatikách S

$$v = v_S = \frac{\ell}{t_F} = \frac{3\,337\ \text{m}}{75{,}650\ \text{s}} \approx 44{,}111\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 158{,}80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$ 2 body

b) Na pneumatikách H sa jedno kolo absolvuje za čas $t_H = t_F + \Delta t_S = 76{,}150$ s.

Čas, za ktorý pretekár absolvuje Veľkú cenu Monaka je potom

$$t_b = n_1 t_F + t_d + (N - n_1)(t_F + \Delta t_S)$$

a po dosadení

t_b = 20 × 75,650 s + 25 s + 58 × 76,150 s

$$t_b = 20 \times 75{,}650\ \text{s} + 58 \times 76{,}150\ \text{s} + 25\ \text{s} = 5954{,}700\ \text{s} = 1\text{h}\ 39\ \text{min}\ 14{,}700\ \text{s}.$$

2 body

Jeho priemerná rýchlosť bola

$$v_b = \frac{N\ell}{t_b} = \frac{78\times 3337\ \text{m}}{5\,929{,}700\ \text{s}} = 43{,}895\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 158{,}02\ \text{km/h}.$$ 2 body

c) Ak sa súper rozhodne meniť pneumatiky dvakrát, potom je z hľadiska maximálnej rýchlosti a obmedzenej výdrže jednotlivých typov pneumatík najvýhodnejšie zvoliť kombináciu S-S-M s maximálnym využitím pneumatík S, tzn. 2 × 20 kôl a zvyškom 38 kôl na pneumatikách M.

Čas na jedno kolo na pneumatikách M je $t_M = t_F + \Delta t_S - \Delta t_M$ = 75,850 s.

Preteky potom absolvuje za čas

$$t_c = 2n_1 t_S + (N - 2n_1)t_M + 2t_d = 78 \times 75{,}650\ \text{s} + 38 \times 0{,}200\ \text{s} + 2 \times 25\ \text{s}$$

Po dosadení

$$t_c = 78 \times 75{,}650\ \text{s} + 38 \times 0{,}200\ \text{s} + 2 \times 25\ \text{s} = 5958{,}300\ \text{s} = 1\text{h}\ 39\ \text{min}\ 18{,}300\ \text{s}.$$

Tento čas je o 3,600 s dlhší ako čas t_b, a preto by táto stratégia víťazstvo nepriniesla.

3 body

6) Loď na rieke

Riešenie:

a) Voda v rieke tečie rovnobežne s brehmi. V zmysle poznámky loď vzdialenosť $s = 480$ m medzi brehmi prejde za najkratší čas, ak celú svoju rýchlosť použije len na prekonanie vzdialenosti medzi brehmi (v smere kolmom na smer prúdu vody), teda rýchlosťou $v_\mathrm{L} = 14{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ za čas

$t_1 = \frac{s}{v_\mathrm{L}} = \frac{480\ \mathrm{m}}{4{,}0\ \mathrm{m/s}} = 120\ \mathrm{s}.$ 3 body

b) K odhadu najmenšej vzdialenosti s_b môže byť použitých viac argumentov.
Jedným z nich je nasledujúci: rýchlosť lode v smere kolmom na prúd vody je stále v_L. Úsek rieky AB a CD spolu majú rovnakú šírku ako BC. Rovnakú dobu $\frac{t_1}{2}$ pláva na úsekoch AB + CD, ako na úseku BC. Na úsekoch AB a CD unáša rieka loď rýchlosťou $v_1 = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ v smere toku, a za čas $\frac{t_1}{2}$ ju unesie celkom o

$d_1 = v_1 \frac{t_1}{2} = \left(1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(60\ \mathrm{s}) = 60\ \mathrm{m}.$ 1 bod

Na úseku BC je rýchlosť vody $v_2 = 10{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a prúd vody loď unesie o

$d_2 = v_2 \frac{t_1}{2} = \left(3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(60\ \mathrm{s}) = 180\ \mathrm{m}.$

Loď k opačnému brehu dorazí o $d_1 + d_2 = 240$ m pod prístavom D. 1 bod

c) Ak loď sa chce udržať na spojnici prístavov A a D, musí sa plaviť v úsekoch AB a CD proti prúdu vody rýchlosťou $v_1 = 1{,}0\ \mathrm{m/s}$ a zvyškom svojej rýchlosti

$v_{\mathrm{L}1} = \sqrt{v_\mathrm{L}^2 - v_1^2} = \sqrt{15}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3{,}87\ \mathrm{m/s}$

sa plaví po spojnici AD. Cez úseky AB a CD sa takto preplaví za čas

$t_{21} = \frac{s_1 + s_3}{v_{\mathrm{L}1}} = \frac{240\ \mathrm{m}}{3{,}87\ \mathrm{m/s}} \approx 62{,}0\ \mathrm{s}.$ 2 body

Rovnako počítame na úseku BC. Tu sa loď musí plaviť proti prúdu rýchlosťou $v_2 = 3{,}0\ \mathrm{m/s}$ a zvyškom svojej rýchlosti $v_{\mathrm{L}2} = \sqrt{v_\mathrm{L}^2 - v_2^2} = \sqrt{7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 2{,}65\ \mathrm{m/s}$

sa plaví po spojnici AD. Úsek cez BC sa takto preplaví za čas

$t_{21} = \frac{s_2}{v_{\mathrm{L}2}} = \frac{240\ \mathrm{m}}{2{,}65\ \mathrm{m/s}} \approx 90{,}7\ \mathrm{s}.$ 2 body

Plaviť sa bude celkom

$t_2 = t_{21} + t_{22} = 62{,}0\ \mathrm{s} + 90{,}7\ \mathrm{s} = 152{,}7\ \mathrm{s}.$ 1 bod

7) Ohmov zákon – *experimentálna úloha*

Riešenie:

Náležite vypracované body (2) – 2 body, (3) – 4 body, (4) – 2body (5) – 1 bod, (6) – 1 bod

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy domáceho kola kat. E
Autori úloh: Boris Lacsný 1, 2, 7, Aba Teleki 3, 4, 5, 6
Recenzia úloh: Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023