65. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2023/2024

kategória F

riešenie úloh domáceho kola

1) Dlhá výmena

Riešenie:

a) Medzi bodmi A a B prejde Peter za čas letu loptičky rýchlosťou $v_2 = 54\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ od Emky

$$t_1 = \frac{L}{v_2}\ .$$

Peter absolvuje za tento čas vzdialenosť $s_{\mathrm{AB}} = s = 8{,}23$ m a jeho priemerná rýchlosť je

$$v_{\mathrm{P1}} = \frac{s}{t_1} = \frac{s}{L}v_2 = \frac{8{,}23\ \mathrm{m}}{23{,}78\ \mathrm{m}}\left(15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \approx 5{,}19\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 18{,}7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$ 2 body

Petrova loptička letí vždy po uhlopriečke s dĺžkou $d = \sqrt{s^2 + L^2} = 25{,}16$ m rýchlosťou $v_1 = 72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Túto vzdialenosť preletí za čas

$$t_2 = \frac{d}{v_1}\ .$$

Emka musí bežať rýchlosťou

$$v_{\mathrm{E1}} = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{d}v_1 = \frac{8{,}23\ \mathrm{m}}{25{,}16\ \mathrm{m}}\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \approx 6{,}54\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 23{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\ .$$ 2 body

b) V tomto prípade bežia obaja rovnakou rýchlosťou

$$v_{\mathrm{P2}} = v_{\mathrm{E2}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{d}{v_1} + \frac{L}{v_2}} = \frac{8{,}23\ \mathrm{m}}{\frac{25{,}16}{20}\mathrm{s} + \frac{23{,}78}{15}\mathrm{s}} \approx 2{,}89\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx\ 10{,}4\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$ 3 body

c) Tu aj Emkina loptička letí rýchlosťou $v_1 = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20\ \mathrm{m/s}$. Ich rýchlosti sa musia zvýšiť na

$$v_{\mathrm{P3}} = v_{\mathrm{E3}} = \frac{s}{t_1 + t_2'} = \frac{s}{\frac{d}{v_1} + \frac{L}{v_1}} = \frac{s}{d + L}v_1 = \frac{8{,}23\ \mathrm{m}}{25{,}16\ \mathrm{m} + 23{,}78\ \mathrm{m}}\left(20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \approx 3{,}36\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 12{,}1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\ .$$

3 body

2) Mars Express

Riešenie:

a) Najmenšia vzdialenosť medzi Zemou a Marsom je

$r_1 = r_M - r_Z \approx 78$ mil. km.

$t_1 = \frac{r_1}{c} \approx \frac{78 \text{ mil. km}}{0{,}30 \frac{\text{mil. km}}{\text{s}}} = 260 \text{ s} = 4 \text{ min } 20 \text{ s}.$ 1 bod

Správne zakreslená pozícia na obrázku RF–1 0,5 bodu

Najväčšia vzdialenosť medzi Zemou a Marsom je

$r_2 = r_M + r_Z \approx 378$ mil. km.

$t_2 = \frac{r_2}{c} \approx \frac{378 \text{ mil.km}}{0{,}3 \frac{\text{mil.km}}{\text{s}}} = 1260 \text{ s} = 21 \text{ min } 0 \text{ s}.$ 1 bod

Správne zakreslená pozícia na obrázku RF–1 0,5 bodu

b) Pozícia, v ktorej Slnko bude rušiť signál zo Zeme najmenej je vtedy, keď z Marsu pozorovaný uhol medzi Slnkom a Zemou je najväčší. Táto situácia nastáva, keď trojuholník vytváraný Slnkom (S), Zemou (Z) a Marsom (M) je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom v bode M.
1 bod

Správne zakreslená pozícia na obrázku (aspoň jedna) 1 bod

V tejto situácii je vzdialenosť

$r_b = \sqrt{r_M^2 - r_Z^2} \approx 172$ mil. km.

Túto vzdialenosť stačí určiť meraním v obrázku RF–1: $r_b \approx$ (169 – 175) mil. km

Oneskorenie signálu je

$t_b = \frac{r_b}{c} \approx \frac{172 \text{ mil.km}}{0{,}3 \frac{\text{mil.km}}{\text{s}}} \approx 573 \text{ s} = 9 \text{ min } 33 \text{ s}$ 1 bod

c) Uhlové rýchlosti sú

$\omega_Z = \frac{360°}{T_Z} \approx 0{,}986$ °/deň 1 bod

$\omega_M = \frac{360°}{T_M} \approx 0{,}5240$ °/deň 1 bod

Zem obieha rýchlejšie, a kým je v pozícii medzi Z_{c1} a Z_{c2}, je k Marsu bližšie, než v krajných pozíciách Z_{c1} a Z_{c2}, tzn. doba oneskorenia je kratšia, ako t_b.

Určíme stredový uhol Z_{c1} S Z_{c2}.

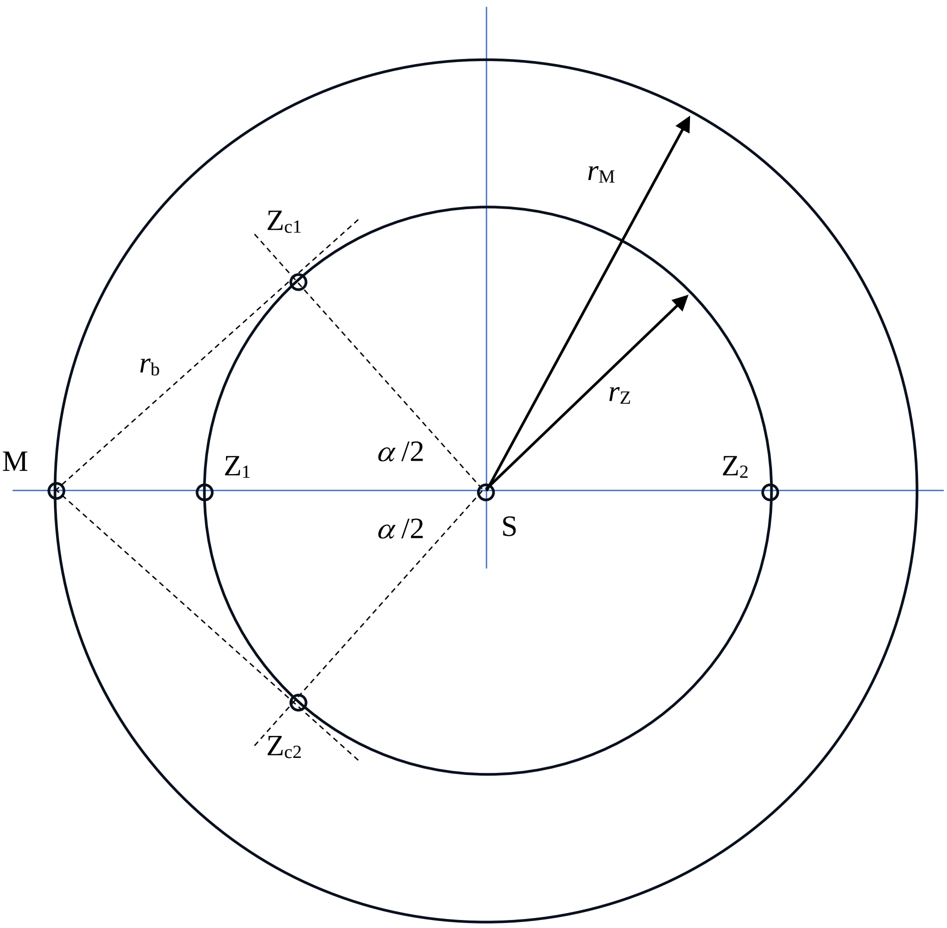
S použitím goniometrickej funkcie

$\alpha = 2 \arccos \frac{r_Z}{r_M} \approx 97{,}7°.$

Tento uhol stačí určiť uhlomerom z obrázku RF–1: $\alpha \approx 97° - 99°$.

Keďže sa i Mars pohybuje, vzájomný uhol vzhľadom na Slnko sa mení uhlovou rýchlosťou $\omega_Z - \omega_M$ a teda čas na prekonanie uhlu α

$T_c = \frac{\alpha}{\omega_Z - \omega_M} \approx 212$ dní. 2 body



Obr. RF-1

3) Závažie v nádobe

Riešenie

a) Tiaž nádoby so závažím je $G = G_\mathrm{n} + G_z = 700$ N.

Tiaž vytlačenej vody je rovnaká a platí $G = \rho g\, abd$,

odkiaľ $d = \dfrac{G_\mathrm{n} + G_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{v}\, a b g} = \dfrac{700\ \mathrm{N}}{\left(1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)(0{,}60\ \mathrm{m})(0{,}90\ \mathrm{m})} \approx 132$ mm. 4 body

b) Tiaž G plávajúcej sústavy je v rovnováhe so vztlakovou silou

$$F_\mathrm{vz} = \rho_\mathrm{v}\, a b d' g + \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{z}\, g = G_\mathrm{z} + G_\mathrm{n},$$

kde objem závažia $V_\mathrm{z} = \dfrac{G_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{z}\, g}$.

Hĺbka ponorenia nádoby

$$d' = \frac{1}{\rho_\mathrm{v}\, a b\, g}\left[\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{z}}\right) G_\mathrm{z} + G_\mathrm{n}\right] = \frac{\left(1 - \frac{1000}{8000}\right) 200\ \mathrm{N} + 500\ \mathrm{N}}{\left(1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)(0{,}600\ \mathrm{m})(0{,}900\ \mathrm{m})} \approx 127\ \mathrm{mm}.$$

6 bodov

4) Korálkový prsteň

Riešenie

a) Môže nastať 6 rôznych prípadov uvedených v tabuľke 1 bod

n	a	b	c	M_n / g
1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	3
2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	3,5
3	ρ_2	ρ_1	ρ_3	3,5
4	ρ_2	ρ_3	ρ_1	4,25
5	ρ_3	ρ_1	ρ_2	5
6	ρ_3	ρ_2	ρ_1	5,25

za každú celkovú hmotnosť 0,5 bodu

Celkový objem korálikov $V = V_\mathrm{a} + V_\mathrm{b} + V_\mathrm{c} = 3{,}50\ \mathrm{cm}^3$.

Pri celkovom ponorení je hmotnosť vody s objemom V

$$M = V\rho = 3{,}50\ \mathrm{g}.$$

V tabuľke sú vypočítané hmotnosti prsteňa pre jednotlivé rozdelenia materiálov

$$M_n = V_\mathrm{a}\rho_\mathrm{a} + V_\mathrm{b}\rho_\mathrm{b} + V_\mathrm{c}\rho_\mathrm{c}\ .$$

Tiaž prsteňa je $G_n = M_n\, g$, vztlaková sila pri celkovom ponorení $F_\mathrm{vz} = M\, g$.

Pri poklese prsteňa na dno platí $F_\mathrm{vz} < G_n$, tzn. $M < M_n$.

Prsteň sa vo vode vznáša, ak $F_\mathrm{vz} = G_n$, tzn. $M = M_n$.

V zvyšných prípadoch sa prsteň vynorí ponorený objem je menší ako V, tzn. $M > M_n$.

fyzikálne zdôvodnenie 3 body

Pre jednotlivé prípady podľa tabuľky:

b) Podmienka plávania prsteňa $M_n < M$, čo zodpovedá prípadu $n = 1$. 1 bod

c) Podmienka klesnutia prsteňa ku dnu $M_n > M$, čo zodpovedá prípadom $n = 4, 5, 6$. 1 bod

d) Prsteň sa vo vode vznáša, ak $M_n = M$, čo zodpovedá prípadom $n = 2, 3$. 1 bod

5) Čaj v miske

Riešenie:

a) Vodou odovzdané teplo Q_{1a} a miskou prijaté teplo Q_{2a} sa rovnajú, pričom platí

$$Q_{1a} = \rho V c (t_1 - t_a) = m c_p (t_a - t_2) = Q_{2a},$$

odkiaľ dostávame $t_a = \dfrac{\rho V c t_1 + m c_p t_2}{m c_p + \rho V c} \approx 74{,}8\ °C.$ 4 body

b) V tomto prípade vodou odovzdané teplo je Q_{1b} a miskou prijaté teplo je Q_{2b} a platí

$$Q_{1b} = \rho V_b c (t_1 - t_v) = m c_p (t_3 - t_2) = Q_{2b},$$

odkiaľ máme $V_b = \dfrac{m c_p (t_3 - t_2)}{\rho c (t_1 - t_v)} \approx 6{,}1$ ml. 3 body

c) Miska sa zohreje o $(t_4 - t_3) = 15{,}0\ °C$ a preto prijme teplo

$$Q_{2c} = m c (t_4 - t_3) \approx 1\,916\ \text{J}$$

Šálkou prijaté teplo sa rovná teplu, ktoré voda odovzdala, preto vodou odovzdané teplo je

$Q_{c1} = Q_{c2} = 1\,916$ J. 3 body

Poznámka:

V tomto prípade je potrebné naliať čaj s objemom $V_c = \dfrac{Q_{c1}}{\rho c (t_1 - t_v)} \approx 9{,}2$ ml.

6) Formule 1 – Silverstone

Riešenie:

a) Čas prvej etapy $t_1 = (1 \times 3\,600 + 11 \times 60 + 7{,}284)\ \text{s} = 4\,267{,}284$ s.

Rýchlosť v prvej etape

$$v_1 = \frac{n_1 \ell}{t_1} = \frac{42 \times 5\,891\ \text{m}}{4\,267{,}284\ \text{s}} \approx 57{,}981\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 208{,}732\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$ 1 bod

b) Keby sa neprejavilo opotrebovanie pneumatík, zvyšovala by sa rýchlosť v každom ďalšom kole o Δv_m. V $(n_1 + 1)$–om kole by bola rýchlosť pretekára $v_2 = v_1 + n_1 \Delta v_m$, čo je rýchlosť na nových pneumatikách po výmene po 42. kole, ktorou prešiel okruh za najkratší čas $t_m = 90{,}813$ s, a teda rýchlosťou

$$v_2 = \frac{\ell}{t_m} = \frac{5\,891\ \text{m}}{90{,}813\ \text{s}} \approx 64{,}870\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 233{,}530\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Prírastok rýchlosti

$$\Delta v_m = \frac{v_2 - v_1}{n_1} \approx 0{,}164\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}590\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$ 1 bod

c) V prípade jedinej výmeny pneumatík podľa časti b) pretekár prejde prvú etapu rýchlosťou v_1 a druhú po výmene pneumatík, rýchlosťou v_2. Celý pretek s jednou zastávkou v depe prejde za čas

$$t_{p1} = \frac{n_1 \ell}{v_1} + t_d + \frac{(N - n_1)\ell}{v_2} \approx 5\,195{,}42\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 26\ \text{min}\ 35{,}42\ \text{s}.$$ 2 body

Pri výmene po prvom kole by pretekár prešiel prvé kolo rýchlosťou v_1 a po výmene pneumatík po prvom kole by pretekár pokračoval rýchlosťou $v_1 + \Delta v_m$. Celý pretek by absolvoval za čas

$$t_{p11} = \frac{\ell}{v_1} + t_d + \frac{(N-1)\,\ell}{v_1 + \Delta v_m} \approx 5\,288{,}70\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 28\ \text{min}\ 8{,}70\ \text{s}.$$

V druhom prípade by pretekár prešiel rýchlosťou v_1 prvých N–1 kôl a až posledné kolo by prešiel rýchlosťou $v_1 + (N-1)\,\Delta v_m$. Celkový pretek by absolvoval za čas

$$t_{p12} = \frac{(N-1)\,\ell}{v_1} + t_d + \frac{\ell}{v_1 + (n-1)\,\Delta v_m} \approx 5\,290{,}51\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 28\ \text{min}\ 10{,}51\ \text{s}.$$

V obidvoch prípadoch je čas horší ako pri výmene po 42 kolách, pričom výmena po prvom kole je výhodnejšia ako výmena po predposlednom kole, $t_{p11} < t_{p12} < t_{p1}$.

3 body

d) Pretekár absolvuje $n_2 = 21$ kôl rýchlosťou v_1, potom $(n_3 - n_2) = 21$ kôl rýchlosťou $v_2 = v_1 + (n_3 - n_2)\,\Delta v_m$, na záver $(N - n_3) = 10$ kôl rýchlosťou $v_3 = v_1 + n_3\,\Delta v_m$ a dvakrát má časovú stratu t_d, lebo ide dvakrát do depa. Teda

$$t_{p2} = \frac{n_2\,\ell}{v_1} + t_d + \frac{(n_3 - n_2)\,\ell}{v_1 + n_2\,\Delta v_m} + t_d + \frac{(N - n_3)\,\ell}{v_1 + n_3\,\Delta v_m} \approx 5\,095{,}80\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 24\ \text{min}\ 55{,}80\ \text{s}.$$

Z výsledku vidíme, že táto stratégia je najlepšia. 3 body

7) **Ľadové kryhy** – experimentálna úloha

Riešenie:

Hodnotiť experiment treba veľmi benevolentne, treba sa zamerať hlavne na popis, ako experiment bol vykonaný a ako boli výsledky vyhodnotené (slanosť). Ak sa dobre oddelia časti ľadu, slanosť je výrazne odlišná.

10 bodov

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy domáceho kola kat. F
Autori úloh: Boris Lacsný 1, 3, 4, Aba Teleki 2, 5, 6, 7
Recenzia úloh: Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Úlohy preložil: Aba Teleki
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2023