MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1 Na párty sa zišlo 20 osôb, z toho 10 chlapcov a 10 dievčat. Každému sa páči práve k osôb opačného pohlavia. Je vždy možné vytvoriť pár, v ktorom sa obom páči ten druhý? Riešte v prípade

a) $k = 5$;

b) $k = 6$.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

a) Ukážeme, že hľadaný pár nemusí existovať. Predpokladajme, že chlapcov možno rozdeliť na dve päťčlenné skupiny A a B a dievčatá na dve päťčlenné skupiny C a D tak, že platí: Všetkým chlapcom z A sa páčia práve dievčatá z C, všetkým chlapcom z B práve dievčatá z D, všetkým dievčatám z C sa páčia práve chlapci z B a všetkým dievčatám z D práve chlapci z A. Vtedy sa naozaj každému páči práve 5 osôb opačného pohlavia, avšak neexistuje jediný pár so vzájomnými sympatiami.

b) Počet dvojíc, v ktorých sa chlapcovi páči dievča, je 60. Rovnako je 60 počet dvojíc, v ktorých sa dievčaťu páči chlapec. Tieto dve skupiny dvojíc nemôžu mať prázdny prienik, pretože $60 + 60 = 120$ a všetkých dvojíc opačného pohlavia je iba $10 \cdot 10$ čiže 100. Nutne tak existuje pár (dokonca je ich aspoň 20), v ktorom sa obom páči ten druhý.

Riešenie 2:

b) Ak rozdá každý z 10 chlapcov po jednej ruži tým dievčatám, ktoré sa mu páčia, všetkých 10 dievčat dostane spolu 60 ruží. Jedno dievča tak dostane priemerne $60 : 10$ čiže 6 ruží, niektorá z nich preto dostane aspoň 6 ruží. Keďže sa jej páči 6 z 10 chlapcov, musí aspoň 2 ruže dostať od chlapcov, ktorí sa jej páčia.

---

2 Z cifier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom vypočítame súčty všetkých trojíc po sebe idúcich cifier a zapíšeme týchto 7 súčtov vzostupne. Rozhodnite, či možno takto získať postupnosť

a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22;

b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

a) Vyhovuje napríklad číslo 137 658 942. Súčty trojíc jeho susedných cifier totiž zľava doprava sú 11, 16, 18, 19, 22, 21, 15.

b) Ukážeme, že pre každé deväťciferné číslo $\overline{a_1 a_2 \dots a_8 a_9}$ zostavené z cifier 1 až 9 platí, že súčet siedmich čísel určených zadaním úlohy je najviac 122. Keďže pre čísla zo zadania b) platí $11+15+16+18+19+21+23 = 123$, ukážeme tým, že požadované deväťciferné číslo neexistuje.

Uvažovaný súčet S siedmich čísel je možné zapísať a následne odhadnúť nasledovne:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_6 + a_7 + a_8) + (a_7 + a_8 + a_9) \\ &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 3a_6 + 3a_7 + 2a_8 + a_9 \\ &= 3(a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9) - (a_1 + a_2 + a_8 + a_9) - (a_1 + a_9) \\ &\le 3(1 + 2 + \dots + 8 + 9) - (1 + 2 + 3 + 4) - (1 + 2) = 3 \cdot 45 - 10 - 3 = 122. \end{aligned}$$

Poznámka:

Hoci je vyššie uvedené riešenie úplné, ukážeme teraz, ako je možné nájsť príklad vyhovujúceho čísla z riešenia časti a). Nájdeme ich dokonca všetky, a to na základe pozorovania, ktoré nás doviedlo aj k riešeniu časti b).

Prvým dobrým krokom je povšimnúť si, že obe sedmice čísel zo zadania úlohy obsahujú „pomerne veľké“ čísla na to, aby vznikli zo všetkých zastúpených cifier 1 až 9. To nás môže motivovať na posúdenie celkového súčtu S všetkých siedmich zadaných čísel. Ako môže byť tento súčet veľký? Odpoveď na túto otázku určite súvisí s tým, koľkokrát je ktorá cifra v súčte S zastúpená. Preto už je vcelku ľahké prísť na horný odhad S číslom 122 spôsobom, akým sme to vyššie urobili.

Dodajme teraz, čo sme v riešení časti b) nepotrebovali. Z nášho odvodenia vyplýva, že rovnosť $S = 122$ nastane práve vtedy, keď $\{a_1, a_2, a_8, a_9\} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $a_1, a_9\} = \{1, 2\}$, čiže $\{a_1, a_9\} = \{1, 2\}$ a $\{a_2, a_8\} = \{3, 4\}$.

Skúmajme najskôr čísla $\overline{13a_3 \ldots a_7 42}$. Aby $1+3+a_3$ bol jeden z predpísaných súčtov, musí byť $a_3 = 7$. Podobnou úvahou o súčte $a_7 + 4 + 2$ potom nutne $a_7 = 9$. Máme teda čísla $\overline{137a_4a_5a_6942}$. Zostáva tak posúdiť šesť spôsobov, ako trojici a_4, a_5 a a_6 priradiť zvyšné cifry 5, 6 a 8. Jednotlivé spôsoby už je ľahké otestovať, je pritom možné niektoré z nich vopred vylúčiť (napríklad využiť to, že $a_4 \neq 5$). Bez týchto podrobností uveďme, že vo výsledku dostaneme práve dve vyhovujúce čísla 137 658 942 a 137 685 942.

Skúmanie čísel $\overline{14a_3 \ldots a_7 32}$ je kratšie: Tentoraz zistíme, že obe cifry a_3 a a_7 by museli byť 6, teda žiadne číslo tohto typu nevyhovuje.

Posudzovanie zvyšných čísel $\overline{23a_3 \ldots a_7 41}$ a $\overline{24a_3 \ldots a_7 31}$ už nie je potrebné. Stačí ich previesť na predchádzajúce dva typy, a to vďaka všeobecnému postrehu, že číslo $\overline{a_1a_2 \ldots a_8a_9}$ vyhovuje zadaniu práve vtedy, keď mu vyhovuje „zrkadlovo prevrátené“ číslo $\overline{a_9a_8 \ldots a_2a_1}$.

Čísla, ktoré vyhovujú zadaniu a), sú teda práve štyri, a to 137 658 942, 137 685 942 a ich „zrkadlové obrazy“ 249 856 731 a 249 586 731.

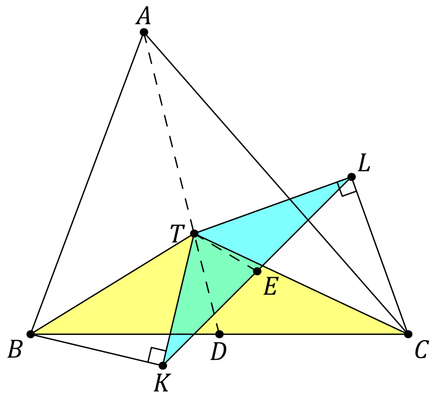
---

3 Nech T je ťažisko trojuholníka ABC. Nech K je bod polroviny BTC taký, že BTK je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou BT. Nech L je bod polroviny CTA taký, že CTL je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou CT. Označme D stred strany BC a E stred úsečky KL. Určte všetky možné hodnoty pomeru $|AT| : |DE|$.

(Michal Rolínek)

Riešenie 1:

Dokážeme, že pomer $|AT| : |DE|$ má jedinú možnú hodnotu, a to $2\sqrt{2}$.



Najprv odvodíme, že $|TD| / |DE| = \sqrt{2}$. (Je možné dokonca ukázať, že TDE je rovnoramenný trojuholník s pravým uhlom pri vrchole E, ale to k riešeniu úlohy potrebovať nebudeme.) Zameriame sa pri tom na trojuholníky BTC a KTL, ktoré sú vyfarbené na obrázku. Orientované uhly BTK a CTL sú zhodné, lebo oba majú veľkosti 45° a rovnakú orientáciu ako uhol BTC, teda v otočení so stredom T o 45° bude obrazom uhla BTC práve uhol KTL. Preto sú tieto uhly zhodné.

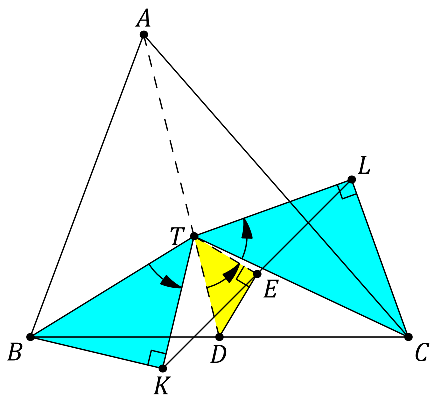
Navyše vďaka podobnosti trojuholníkov BKT a CLT platí $|BT| / |TC| = |KT| / |TL|$. Preto sú podľa vety *sus* naše trojuholníky BTC a KTL podobné, a to v pomere $|BT| : |KT|$ s hodnotou $\sqrt{2}$ (vďaka pravouhlému rovnoramennému trojuholníku BKT). Pre dĺžky príslušných ťažníc TD a TE vyznačených trojuholníkov teda naozaj platí $|TD| / |TE| = \sqrt{2}$.

Odvodený výsledok zostáva spojiť s poznatkom, že pre ťažisko T trojuholníka ABC platí $|AT| = 2\,|TD|$. Dostaneme tak

$$\frac{|AT|}{|DE|} = \frac{2\,|TD|}{|DE|} = 2\sqrt{2}.$$

Riešenie 2:

Uvažujme špirálovú podobnosť so stredom T, koeficientom $\sqrt{2}/2$ a orientovaným uhlom BTK, ktorý je zhodný s orientovaným uhlom CTL tej istej veľkosti 45°.



V tomto zobrazení prejde bod B do bodu K a C do bodu L. Z toho vyplýva, že obrazom úsečky BC je úsečka KL. Znamená to, že aj stred D úsečky BC prejde do stredu E úsečky KL. Z $B \to K$, $C \to L$ a $D \to E$, ako je známe, vyplýva, že trojuholník TDE je podobný obom trojuholníkom TBK a TCL. (Toto tvrdenie, ktoré nie je nutné v úplnom riešení zdôvodňovať, vyplýva z toho, že pri špirálovej podobnosti so stredom T sú všetky trojuholníky TXX', kde X' je obraz X, navzájom podobné vďaka vete *sus*.) Preto aj TDE je pravouhlý rovnoramenný trojuholník, ktorý pritom má pravý uhol pri vrchole E. Z toho $|TD| / |TE| = \sqrt{2}$.

Keďže T je ťažisko trojuholníka ABC, platí $|AT| = 2\,|TD|$, a teda

$$\frac{|AT|}{|DE|} = \frac{2\,|TD|}{|DE|} = 2\sqrt{2}.$$

---

4 O nepárnom prvočísle p povieme, že je *špeciálne*, ak súčet všetkých prvočísel menších ako p je násobkom p. Existujú dve po sebe idúce prvočísla, ktoré sú špeciálne?

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie 1:

Dokážeme sporom, že takéto dve prvočísla neexistujú.

Označme n. prvočíslo p_n. Nech pre niektoré n, kde $n \geq 2$, sú obe prvočísla p_n a p_{n+1} špeciálne. Potom existujú prirodzené čísla a a $b$také, že platia rovnosti

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} = ap_n$$

a

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = bp_{n+1}.$$

Po dosadení súčtu z prvého vzťahu do druhého dostaneme $ap_n + p_n = bp_{n+1}$, čiže $(a+1)p_n = bp_{n+1}$. Prvočíslo p_n tak delí číslo bp_{n+1} a je pritom nesúdeliteľné s prvočíslom p_{n+1}, takže delí číslo b. Existuje teda kladné celé číslo c také, že $b = cp_n$. Preto platí

$$p_{n+1}p_n \geq (n+1)p_n > p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n = bp_{n+1} = cp_n p_{n+1},$$

z čoho $1 > c$, čo je však spor.

Poznámka:

Dokázali sme vlastne všeobecnejšie tvrdenie: V žiadnej rastúcej postupnosti navzájom nesúdeliteľných prirodzených čísel sa nenájdu dva susedné členy, z ktorých každý je deliteľom súčtu všetkých jemu predchádzajúcich členov.

Poznámka:

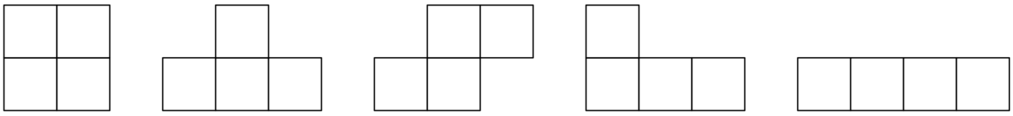
Špeciálne prvočísla naozaj existujú. Všetky doposiaľ známe sú:

- 5,
- 71,
- 369 119,
- 415 074 643,
- 55 691 042 365 834 801.

Prípadný ďalší vývoj je možné sledovať na https://oeis.org/A007506.

---

5 Rozhodnite, či existuje neprázdna podmnožina políčok tabuľky 7 × 7 taká, že pre každé z *tetramín*



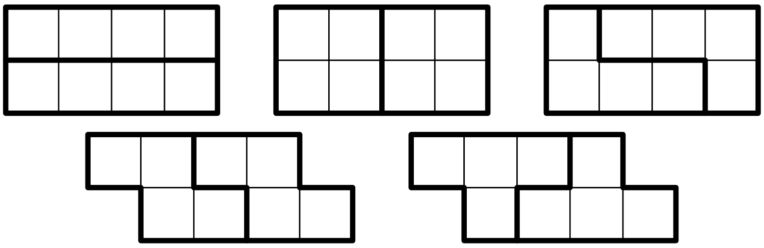
možno túto podmnožinu vyplniť bez prekrývania výlučne jeho kópiami. Jednotlivé kópie môžeme ľubovoľne otáčať a preklápať.

(Michal Rolínek)

Riešenie:

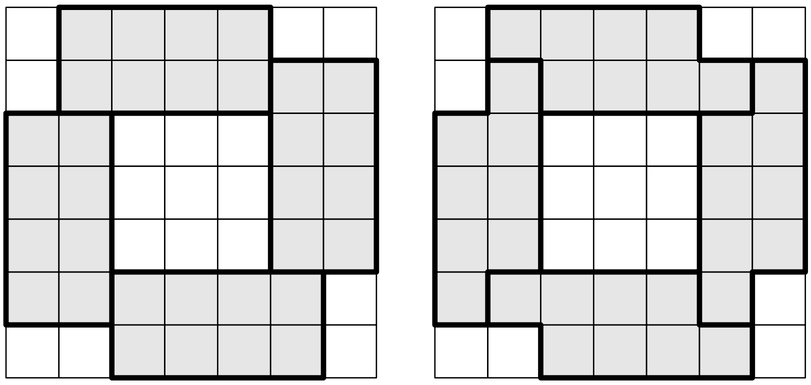
Taká podmnožina políčok existuje, nájdeme totiž jej konkrétny príklad.

Konštrukciu príkladu a overenie jeho správnosti si zjednodušíme, keď od piatich vyplňovaní tetraminami prejdeme k dvom vyplňovaniam *oktaminami*, ktoré vidíte na obrázku – prvé oktamino v troch kópiách, druhé oktamino v dvoch kópiách.

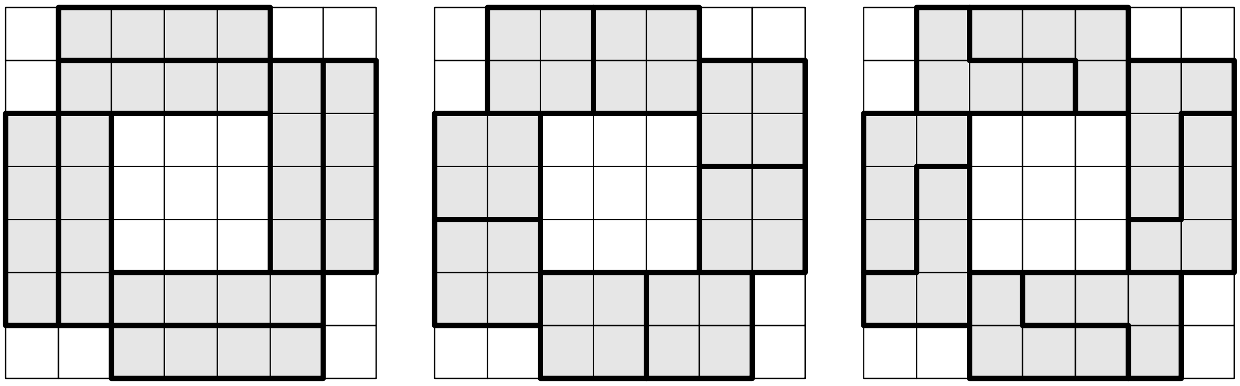


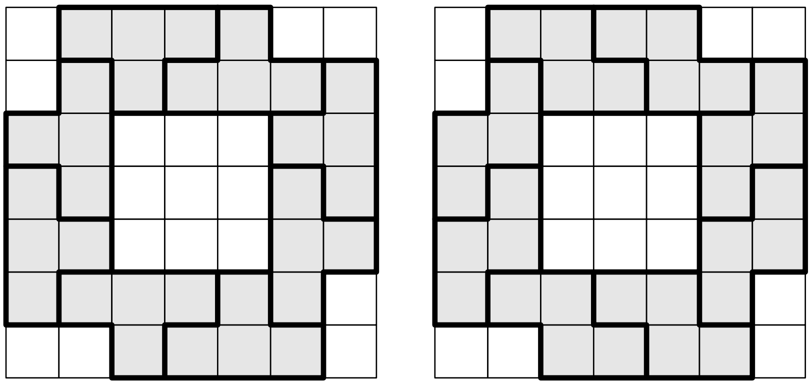
Takýto prechod je možný, pretože každé z piatich oktamín je vyplnené dvoma kópiami iného z piatich tetramín zo zadania. (Zdôraznime, že nie je vopred jasné, či takéto zjednodušenie úlohy dopadne „dobre". Chýba nám dôkaz tvrdenia, že z existencie piatich vyplnení tetraminami vyplýva existencia dvoch vyplnení oktaminami.)

Neprázdnu podmnožinu políčok, ktorú je možné vyplniť kópiami každého z dvoch navrhnutých oktamín, možno nájsť ľahšie. Jej príklad aj s oboma vyplneniami je na obrázku.



Zhrnutím tak dostávame takéto riešenie:





6 Pre reálne čísla a, b, c, d z uzavretého intervalu $[1, 2]$ platí $(a + c)(b + d) = 8$. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq 1,$$

a určte, kedy nastane rovnosť.

(Zdeněk Pezlar)

Riešenie 1:

Vo všetkých častiach textu budeme predpokladať, že čísla a, b, c, d spĺňajú podmienky uvedené v zadaní.

V prvej časti riešenia dokážeme, že zadaná nerovnosť platí.

Najprv si všimneme, že menovatele zastúpených zlomkov sú kladné čísla, pretože čísla a, b, c, d sú aspoň 1. Keďže navyše ležia v intervale dĺžky 1, platí $(a - b)^2 \leq 1$, čiže $a^2 + b^2 - 1 \leq 2ab$. Z nerovností $0 < a^2 + b^2 - 1 \leq 2ab$ vyplýva, že pre prvý zlomok zo zadania platí

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} \geq \frac{1}{2ab}.$$

Ak spočítame túto nerovnosť s jej obdobami pre ďalšie tri zadané zlomky, dostaneme

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2cd} + \frac{1}{2da}.$$

Nerovnosť zo zadania tak bude dokázaná, ak overíme jednoduchšiu nerovnosť

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq 2.$$

Využijeme na to známu nerovnosť pre *súčin dvoch súčtov*, konkrétne súčet niekoľkých kladných čísel a súčet ich prevrátených hodnôt. V našom prípade má táto nerovnosť tvar

$$(ab + bc + cd + da)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right) \geq 4^2.$$

Z nej už vyplýva požadovaná nerovnosť:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{da} \geq \frac{4^2}{ab + bc + cd + da} = \frac{16}{(a + c)(b + d)} = \frac{16}{8} = 2.$$

V druhej časti riešenia určíme, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť. Vtedy je nutné, aby platila rovnosť $(a - b)^2 \leq 1$ a jej zvyšné tri obdoby. Hľadané štvorice (a, b, c, d) tak nutne spĺňajú rovnosti

$$|a - b| = |b - c| = |c - d| = |d - a| = 1.$$

Ak platí $a > b$, ľahko už takú štvoricu čísel z intervalu $[1, 2]$ jednoznačne určíme ako $(2, 1, 2, 1)$. V opačnom prípade $b \geq a$ obdobne dospejeme k jedinej štvorici $(1, 2, 1, 2)$. Dosadením každej z dvoch určených štvoríc do pôvodnej nerovnosti zistíme, že rovnosť naozaj spĺňajú, pretože každý zo štyroch zlomkov na ľavej strane je po dosadení rovný $1/4$.

Rovnosť nastane iba pre štvorice $(2, 1, 2, 1)$ a $(1, 2, 1, 2)$.

Poznámka:

Vysvetlime trochu umelý obrat z úvodu podaného riešenia. Dokazovanú nerovnosť možno len ťažko nejako výhodne algebraicky upraviť. Preto sme sa rozhodli odhadnúť zdola jednotlivé zlomky, ktoré sa sčítajú na ľavej strane. Najjednoduchšie by bolo, keby platili štyri odhady typu

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} \geq \frac{1}{4}.$$

Potrebovali by sme tak nerovnosť $a^2+b^2 \leq 5$, ktorej platnosť pre naše čísla a, b (z intervalu $[1, 2]$) však zaručenú nemáme.

Preto sme na úvod odvodili dolný odhad $\frac{1}{a^2+b^2-1} \geq \frac{1}{2ab}$ s nekonštantnou pravou stranou, závislou od súčinu čísel a a b. To sa ukázalo výhodné aj preto, že súčin ab je jedným zo štyroch sčítancov, ktoré dostaneme roznásobením súčinu $(a+c)(b+d)$ so zadanou hodnotou 8. Výhoda sa potom prejavila po využití užitočnej nerovnosti *súčin dvoch súčtov*: Pre ľubovoľnú n-ticu kladných reálnych čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ platí

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve v prípade $a_1 = \cdots = a_n$. Dodajme, že túto nerovnosť je možné s úspechom uplatniť tiež rovno na súčet na ľavej strane pôvodnej nerovnosti (iné riešenie nižšie).

Poznamenajme ešte, že v druhej časti riešenia sme sa zaoberali iba podmienkou rovnosti v

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1} \geq \frac{1}{2ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2cd}+\frac{1}{2da}.$$

Tá je v skutočnosti ekvivalentná s rovnosťami

$$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1.$$

Záverečnú skúšku dosadením sme aj napriek tomu museli vykonať, lebo sme neposúdili rovnosť v druhej použitej nerovnosti

$$(ab+bc+cd+da)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\right) \geq 4^2.$$

Tá nastane práve vtedy, keď platí $ab = bc = cd = da$, čiže $a = c$ a $b = d$. Tieto dve rovnosti však obe nájdené štvorice spĺňajú, teda nutnosť skúšky pri odvodení podmienok $a = c$ a $b = d$ odpadá.

Riešenie 2:

Označme L ľavú stranu dokazovanej nerovnosti. Rovnako ako v prvom riešení zdôvodníme, že L je súčtom prevrátených hodnôt štyroch kladných čísel, ktorých súčet je pritom zrejme rovný $2(a^2+b^2+c^2+d^2-2)$. Podľa nerovnosti pre *súčin dvoch súčtov*, o ktorej sme sa zmienili v prvom riešení a nasledujúcej poznámke tak platí

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2-2)\cdot L \geq 4^2 = 16,$$

odkiaľ

$$L \geq \frac{8}{a^2+b^2+c^2+d^2-2}.$$

Požadovaná nerovnosť $L \geq 1$ tak bude dokázaná, ak overíme, že platí

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2 \leq 8,$$

t. j. ekvivalentne

$$a^2+b^2+c^2+d^2-(a+c)(b+d) \leq 2.$$

Jej ľavá strana je však zrejme rovná súčtu

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2,$$

ktorý naozaj neprevyšuje 2, pretože každá zo štyroch zastúpených druhých mocnín neprevyšuje 1, a to vďaka tomu, že čísla a, b, c, d ležia v intervale dĺžky 1).

Ak v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť, musí sa každá z druhých mocnín zastúpených v poslednom výraze rovnať 1, t. j. musia platiť rovnosti

$$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1.$$

z prvého riešenia. Preto rovnako ako tam určíme dve štvorice $(2, 1, 2, 1)$ a $(1, 2, 1, 2)$ a overíme, že pre ne rovnosť naozaj nastáva.

Poznámka:

Naznačme malú obmenu práve podaného riešenia, pri ktorej dokazovanú nerovnosť pre súčet štyroch zlomkov dostaneme sčítaním dvoch odhadov

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}\geq\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}\geq\frac{1}{2}.$$

Tieto dva odhady dokážeme súčasne. Ich ľavé strany, ktoré označíme L_1 a L_2, sú totiž súčty prevrátených hodnôt dvoch kladných čísel, pritom súčet týchto dvoch čísel je v oboch prípadoch rovný $a^2+b^2+c^2+d^2-2$. Podľa nerovnosti pre *súčin dvoch súčtov*, tentoraz použitej pre prípad $n=2$, teda platí

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2\right)\cdot L_1\geq 2^2=4,$$

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2\right)\cdot L_2\geq 2^2=4.$$

Oba odhady $L_1, L_2\geq\frac{1}{2}$ tak opäť vyplývajú z nerovnosti $a^2+b^2+c^2+d^2-2\leq 8$, ktorou sme sa zaoberali v predchádzajúcom riešení.

Riešenie 3:

Keďže $a, b, c, d\geq 1$, čísla $a^2+b^2-1, b^2+c^2-1, c^2+d^2-1, d^2+a^2-1$ sú kladné. Podľa nerovnosti medzi ich aritmetickým a harmonickým priemerom preto platí

$$\frac{(a^2+b^2-1)+(b^2+c^2-1)+(c^2+d^2-1)+(d^2+a^2-1)}{4}\geq\frac{4}{\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}},$$

t. j.

$$\frac{2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-4}{4}\geq\frac{4}{\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}},$$

ekvivalentne

$$\frac{1}{a^2+b^2-1}+\frac{1}{b^2+c^2-1}+\frac{1}{c^2+d^2-1}+\frac{1}{d^2+a^2-1}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2+d^2-2}.$$

Stačí teda dokázať, že platí

$$\frac{8}{a^2+b^2+c^2+d^2-2}\geq 1.$$

Nech ? je niektorá z relácií ≤ alebo =. Ekvivalentne upravujme:

$$\frac{8}{a^2+b^2+c^2+d^2-2}\ ?\ 1,$$

$$8\ ?\ a^2+b^2+c^2+d^2-2,$$

$$10\ ?\ a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Podľa predpokladu platí

$$8=(a+c)(b+d)=ab+ad+cb+cd=ab+da+bc+cd=ab+bc+cd+da.$$

Preto ďalej ekvivalentne

$$10-8\ ?\ (a^2+b^2+c^2+d^2)-(ab+bc+cd+da).$$

$$2\ ?\ a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da,$$

$$4\ ?\ 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2bc-2cd-2da,$$

$$4\ ?\ (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2cd+d^2)+(d^2-2da+a^2),$$

$$4\ ?\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2.$$

Keďže $a, b\in[1,2]$, platí

$$1-2\leq a-b\leq 2-1,$$

t. j. ekvivalentne

$$-1 \leq a - b \leq 1,$$

$$|a - b| \leq 1,$$

$$(a - b)^2 \leq 1,$$

pričom rovnosť nastáva práve v prípade $|a - b| = 1$, t. j. keď $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Analogicky $(b - c)^2 \leq 1$ s rovnosťou v prípade $(b, c) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, $(c - d)^2 \leq 1$ s rovnosťou v prípade $(c, d) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, $(d - a)^2 \leq 1$ s rovnosťou v prípade $(d, a) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Platí teda

$$4 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2,$$

teda aj

$$\frac{8}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2} \geq 1,$$

pričom rovnosť nastáva práve v prípade $(a, b, c, d) \in \{(1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1)\}$. Platí teda aj nerovnosť zo zadania, pričom v prípade $(a, b, c, d) \in \{(1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1)\}$ platí

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{1^2 + 2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 + 1^2 - 1} + \frac{1}{1^2 + 2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 + 1^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{1 + 4 - 1} + \frac{1}{4 + 1 - 1} + \frac{1}{1 + 4 - 1} + \frac{1}{4 + 1 - 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

takže aj tu nastáva rovnosť.