MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

1 Existuje 10 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú postupne deliteľné číslami 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Hľadaných 10 čísel existuje, a to napríklad 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162. Platí totiž:

- $153 = 9 \cdot 17$, takže 153 je deliteľné 9.
- $154 = 7 \cdot 22$, takže 154 je deliteľné 7.
- $155 = 5 \cdot 31$, takže 155 je deliteľné 5.
- $156 = 3 \cdot 52$, takže 156 je deliteľné 3.
- $157 = 1 \cdot 157$, takže 157 je deliteľné 1.
- $158 = 1 \cdot 158$, takže 158 je deliteľné 1.
- $159 = 3 \cdot 53$, takže 159 je deliteľné 3.
- $160 = 5 \cdot 32$, takže 160 je deliteľné 5.
- $161 = 7 \cdot 23$, takže 161 je deliteľné 7.
- $162 = 9 \cdot 18$, takže 162 je deliteľné 9.

Poznámka:

Uvedené riešenie je úplné, napriek tomu uvedieme úvahy, ktoré k nemu viedli.

Označme n najmenšie z hľadaných 10 čísel. Rovnako ako v riešení zapíšme prehľadne, čím má byť ktoré číslo deliteľné:

- n je deliteľné 9.
- $n + 1$ je deliteľné 7.
- $n + 2$ je deliteľné 5.
- $n + 3$ je deliteľné 3.
- $n + 4$ je deliteľné 1.
- $n + 5$ je deliteľné 1.
- $n + 6$ je deliteľné 3.
- $n + 7$ je deliteľné 5.
- $n + 8$ je deliteľné 7.
- $n + 9$ je deliteľné 9.

Všimnime si, že platí:

- Ak zvolíme n deliteľné 9, bude aj číslo $n + 9$ deliteľné 9. Zároveň budú čísla $n + 3$ aj $n + 6$ deliteľné 3.
- Ak bude číslo $n + 1$ deliteľné 7, bude aj číslo $n + 8$ deliteľné 7.
- Ak bude číslo $n + 2$ deliteľné 5, bude aj číslo $n + 7$ deliteľné 5.

Keďže je deliteľnosť číslom 1 splnená vždy, stačí nájsť číslo n spĺňajúce tri podmienky:

- n je deliteľné 9,
- $n + 1$ je deliteľné 7,
- $n + 2$ je deliteľné 5.

Zameriame sa najskôr na prvé dve podmienky. Zo všetkých čísel 9, 18, 27, 36, … deliteľných 9 vyberieme najmenšie, ktoré spĺňa druhú podmienku. Tým je 27, pretože 28 je deliteľné 7.

Zamyslime sa, ako vyzerajú všetky ďalšie čísla n spĺňajúce tieto dve podmienky. Zapíšeme ich ako $27 + k$, kde k je kladné celé číslo. Aby sme splnili prvú podmienku, zrejme musí byť k násobok 9 (a to je zároveň postačujúce). Druhá podmienka znamená, že číslo $n + 1$ čiže $28 + k$ má byť deliteľné 7, takže k musí byť aj násobok 7. Vďaka nesúdeliteľnosti čísel 7 a 9 to znamená, že k je násobok čísla $9 \cdot 7$ čiže 63. Takže všetky n spĺňajúce súčasne tieto dve podmienky sú tvaru $27 + 63l$, kde l je prirodzené číslo. Sú to čísla 27, 90, 153, 216, …

Zostáva vyhovieť tretej podmienke. Z čísel $27+2$, $90+2$, $153+2$, $216+2$, ... máme vybrať také, ktoré je deliteľné 5. Prvým z nich je zrejme číslo 155, takže najmenším n spĺňajúcim uvedenú trojicu podmienok je číslo 153 (ktoré sme uviedli v riešení). Keby sme zopakovali úvahu z predchádzajúceho odseku, zistili by sme, že (vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel 63 a 5 a rovnosť $63 \cdot 5 = 315$) všetky vyhovujúce čísla sú tvaru $153 + 315m$, kde m je prirodzené číslo. Patrí medzi ne napríklad číslo so zaujímavým dekadickým zápisom 888 888 888.

Poznámka:

Zadaním úlohy bolo iba rozhodnúť o existencii vyhovujúcej skupiny desiatich po sebe idúcich prirodzených čísel, nebolo preto nutné takú skupinu čísel hľadať. Ukážeme, že jej existencia je dôsledkom *čínskej zvyškovej vety*. S týmto cieľom sa na uvedené tri podmienky, ktoré sme odvodili v prvej poznámke, pozrieme tak, že to isté číslo n má dávať požadované zvyšky po deleniach niekoľkými rôznymi číslami. Konkrétne

- n dáva zvyšok 0 po delení číslom 9,
- n dáva zvyšok 6 po delení číslom 7,
- n dáva zvyšok 3 po delení číslom 5.

Keďže čísla 9, 7 a 5 sú po dvoch nesúdeliteľné, podľa čínskej zvyškovej vety naozaj existuje číslo n, ktoré tri uvedené podmienky spĺňa, ako sme mali ukázať.

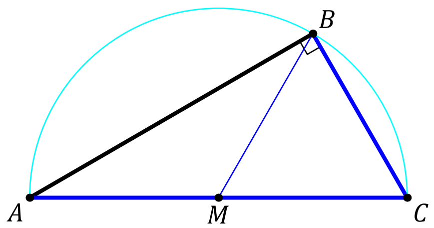
---

2 Nech M je stred prepony AC pravouhlého trojuholníka ABC, pričom platí $|BC| = |CM|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a ABM majú rovnaké polomery.

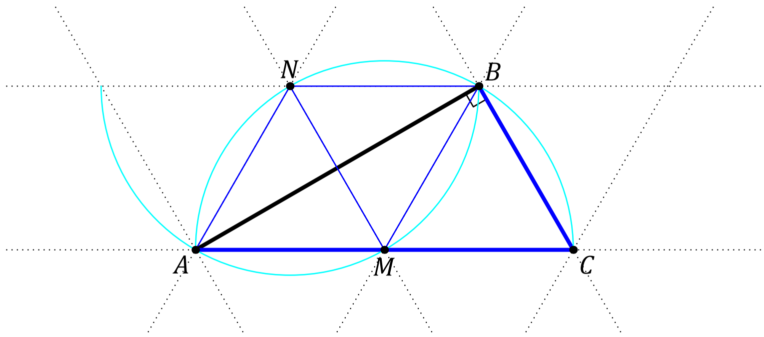
(Michal Pecho)

Riešenie 1:

Podľa Tálesovej vety je bod M stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, teda platí $|MA| = |MB| = |MC|$. Zo zadania tiež platí $|BC| = |CM|$, takže všetky úsečky MA, MB, MC, BC sú zhodné a trojuholník BCM je rovnostranný



Z kópií rovnostranného trojuholníka BCM vytvorme pravidelnú trojuholníkovú sieť podľa obrázku. V nej všetky tri vrcholy A, B, C pôvodného trojuholníka ABC budú uzlovými bodmi.



Pre ďalší vyznačený uzlový bod N potom platí $|NA| = |NB| = |NM|$, takže dĺžka jednej úsečky siete je polomerom ako kružnice opísanej trojuholníku ABM, tak aj polomerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Poznámka:

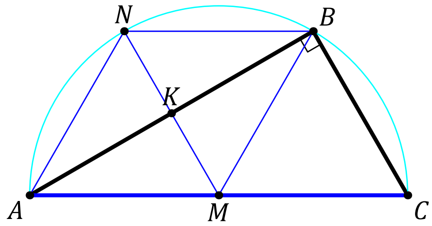
Aj keď je konštrukcia trojuholníkovej siete, ktorú sme v riešení využili, celkom jasná, ukážme, že sme sa mohli bez zmienky o nej zaobísť.

Po nájdení štyroch zhodných úsečiek z obrázku zostrojíme v polrovine ACB rovnostranný trojuholník AMN, ktorý je zhodný s trojuholníkom BCM. Tretí trojuholník BNM je potom rovnoramenný so základňou BN a pri hlavnom vrchole M má uhol veľkosti $180° - 2 \cdot 60°$ čiže $60°$. Je to teda tiež rovnostranný trojuholník, navyše zhodný s trojuholníkmi BCM a AMN. Z rovností $|NA| = |NM| = |NB| = |AM|$ už vyplýva, čo sme mali dokázať.

Mohli sme tiež začať tak, že k rovnostrannému trojuholníku BCM prikreslíme (zvonku) rovnostranný trojuholník BNM. Dostaneme tak kosoštvorec $BCMN$, ktorého strana MN je rovnako ako protiľahlá strana BC kolmá na úsečku AB. Z $MN \perp AB$ a $|MA| = |MB|$ vyplýva, že priamka MN je osou úsečky AB. Preto platí aj $|NA| = |NB|$, čo spolu s $|NB| = |NM|$ znamená, že N je stred kružnice opísanej trojuholníku ABM. Jej polomer NB má pritom rovnakú dĺžku ako polomer MC kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Riešenie 2:

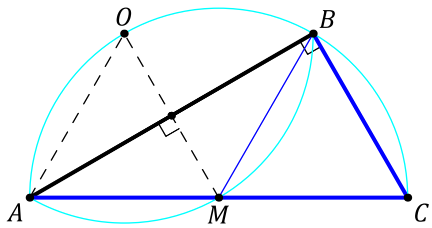
Podľa Tálesovej vety je bod M stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC a jej polomer r je spoločnou dĺžkou úsečiek MA, MB, MC. Označme K stred odvesny AB a strednú priečku MK o dĺžke $\frac{1}{2}|BC|$ predĺžme za bod K do úsečky MN dvojnásobnej dĺžky. Vznikne tak rovnobežník $AMBN$, ktorého uhlopriečka MN je zhodná s odvesnou BC. Vďaka rovnosti $|MA| = |MB| = r$ ide o kosoštvorec so (zhodnými) stranami dĺžky r.



Až teraz využijeme podmienku zo zadania, podľa ktorej platí $|BC| = r$. Dĺžku r majú teda nielen strany kosoštvorca $AMBN$, ale aj jeho uhlopriečka MN. Z rovností $r = |NA| = |NB| = |NM|$ už vyplýva, že N je stred kružnice s polomerom r, ktorá je opísaná trojuholníku ABM.

Riešenie 3:

Na úvod rovnako ako v prvom riešení zistíme, že trojuholník BCM je rovnostranný. Stred kružnice opísanej trojuholníku ABM, ktorý označíme O, leží na osi jeho strany AB. Táto os je vďaka rovnosti $|AM| = |BM|$ súčasne osou uhla AMB, ktorý má veľkosť $180° - |\sphericalangle CMB|$ čiže $120°$. Preto má uhol AMO polovičnú veľkosť $60°$. Je to však uhol pri základni AM rovnoramenného trojuholníka AMO (lebo $|OA| = |OM|$ podľa zavedenia bodu O), ktorý je teda rovnostranný. Platí teda $|MA| = |OM|$, čo sme chceli dokázať.



---

3 Majme 20 výrokov:

„Mám práve 1 sestru.“	„Mám práve 1 brata.“
„Mám práve 2 sestry.“	„Mám práve 2 bratov.“
…	…
„Mám práve 10 sestier.“	„Mám práve 10 bratov.“

a) Každý zo štyroch vlastných súrodencov vyslovil iný z týchto 20 výrokov. Je možné, že všetci štyria mali pravdu?

b) Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, že každý z n vlastných súrodencov môže vysloviť iný z týchto 20 výrokov a mať pravdu.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

a) Áno, je to možné. V prípade, keď štyria súrodenci sú dvaja bratia a dve sestry, môžu pravdivo vysloviť štyri navzájom rôzne výroky. Jeden brat povie „Mám práve jedného brata.“ a druhý „Mám práve dve sestry.“, jedna sestra povie „Mám práve jednu sestru.“ a druhá „Mám práve dvoch bratov.“.

b) V prípade $n = 4$ sme zistili, že každý zo štyroch súrodencov môže vysloviť iný pravdivý výrok.

V prípade $n \geq 5$ sú aspoň traja súrodenci rovnakého pohlavia. Predpokladajme, že každý z nich povie pravdu o počte svojich sestier alebo bratov. Potom však aspoň dva z týchto vyslovených výrokov budú rovnaké (tie o počte sestier alebo tie o počte bratov). Žiadne celé n väčšie než 4 teda nemá požadovanú vlastnosť.

Najväčšie vyhovujúce n je 4.

Poznámka:

V časti b) sme využili poznatok, ktorý sa nazýva *Dirichletov princíp* alebo tiež *priehradkový princíp*. Tvrdí napríklad to, že keď rozmiestnime 13 predmetov do 2 priehradiek, bude v niektorej priehradke aspoň 7 predmetov. Alebo keď rozmiestnime 13 predmetov do 3 priehradiek, bude v niektorej priehradke aspoň 5 predmetov. Alebo pri rozmiestnení $2n + 1$ predmetov do 2 priehradiek bude v niektorej priehradke aspoň $n + 1$ predmetov.

Všeobecne vyjadrené: Pri rozmiestnení aspoň $kn + 1$ predmetov do k priehradiek bude v niektorej priehradke aspoň $n + 1$ predmetov (zapísali sme to vyššie ako v prípade $k = 2$ a $n = 6$, tak v prípade $k = 3$ a $n = 4$, aj v prípade $k = 2$ pri ľubovoľnom n). Pritom „predmety" môžu byť čísla, geometrické útvary, ľudia, výroky, v podstate čokoľvek. Priehradky potom môžu vyjadrovať ľubovoľné vlastnosti jednotlivých predmetov. Napríklad do 2 priehradiek často rozdeľujeme celé čísla podľa toho, či sú párne alebo nepárne.

V našom riešení sme použili Dirichletov princíp dvakrát, vždy pre 2 priehradky. V prvom prípade súrodenci hrali úlohu „predmetov" a pohlavie (mužské/ženské) hralo úlohu „priehradiek". V druhom prípade boli „predmety" výroky a „priehradkami" boli výroky o sestrách a výroky o bratoch.

Poznámka:

Ukážme, že výklad časti b) riešenia možno podať aj inak. Ak je v danej skupine n súrodencov práve B bratov a práve S sestier, môže každý z nich o sebe pravdivo vysloviť iba jeden zo štyroch výrokov (prvé dva sú vyhlásenia bratov, zvyšné dva vyhlásenia sestier):

- Mám práve S sestier.
- Mám práve $B - 1$ bratov.
- Mám práve $S - 1$ sestier.
- Mám práve B bratov.

Preto ak preto majú byť vyslovené výroky v počte n čiže $B + S$ navzájom rôzne, musí platiť $n \leq 4$.

---

4 Koľko usporiadaných štvoríc kladných celých čísel (a, b, c, d) so súčtom 100 spĺňa rovnice

$$(a + b)(c + d) = (b + c)(a + d) = (a + c)(b + d)?$$

(Patrik Bak)

Riešenie:

Najskôr ekvivalentne upravíme prvú rovnicu zo zadania:

$$\begin{gathered}(a + b)(c + d) = (b + c)(a + d),\\ ac + ad + bc + bd = ba + bd + ca + cd,\\ ad + bc - ab - cd = 0,\\ a(d - b) - c(d - b) = 0,\\ (a - c)(d - b) = 0.\end{gathered}$$

Podobne zistíme, že druhá rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$(a - b)(d - c) = 0.$$

Podľa toho, ktoré zo štyroch činiteľov sa v odvodených rovniciach rovnajú nule, sú všetky riešenia (a, b, c, d) zadaných rovníc štvorice jedného zo štyroch typov:

- $a - c = 0$ a $a - b = 0$, čiže $a = b = c$ a d je ľubovoľné,
- $a - c = 0$ a $d - c = 0$, čiže $a = c = d$ a b je ľubovoľné,
- $d - b = 0$ a $a - b = 0$, čiže $a = b = d$ a c je ľubovoľné,
- $d - b = 0$ a $d - c = 0$, čiže $b = c = d$ a a je ľubovoľné.

Dospeli sme k záveru, že rovnice zo zadania platia práve vtedy, keď aspoň tri z čísel a, b, c, d sú si rovné. Rozlíšime teraz, či rovnaké čísla vo štvorici (a, b, c, d) sú štyri alebo tri.

- Ak sú rovnaké všetky štyri čísla, podmienke $a+b+c+d = 100$ vyhovuje jediná štvorica $a = b = c = d = 25$.
- Ak majú tri čísla rovnakú hodnotu x a štvrté má inú hodnotu y, podmienka $a + b + c + d = 100$ prejde na rovnicu $3x + y = 100$, ktorú uvažujeme v obore kladných celých čísel spĺňajúcich podmienku $x \neq y$. Z ekvivalentnej rovnice $y = 100 - 3x$ vyplýva, že číslo y je kladné len v prípade $x \in \{1, 2, \dots, 33\}$, pritom podmienka $y \neq x$ je splnená, ak $x \neq 25$. Máme teda najskôr $33 - 1$ čiže 32 možností na výber čísla x a potom 4 možnosti, ktorému zo štyroch čísel a, b, c, d priradíme hodnotu y čiže $100 - 3x$ (a trom ostatným hodnotu x). Počet vyhovujúcich štvoríc (a, b, c, d) s práve troma rovnakými číslami je teda $32 \cdot 4$ čiže 128.

Celkový počet vyhovujúcich štvoríc je teda $1 + 128$ čiže 129.

Poznámka:

Nad rámec zadania sme zistili, že 128 vyhovujúcich štvoríc je $(x, x, x, 100 - 3x)$, $(x, x, 100 - 3x, x)$, $(x, 100 - 3x, x, x)$, $(100 - 3x, x, x, x)$, pričom $x \in \{1, 2, \dots, 33\} \setminus \{25\}$, a zvyšná 129. vyhovujúca štvorica je $(25, 25, 25, 25)$.

Poznámka:

Prácu s dvojicou rovníc $(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d)$ a $(b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)$ so zhodnými stranami $(b+c)(a+d)$ si možno uľahčiť pozorovaním, že druhú rovnicu dostaneme z prvej, keď v nej premenné b a c navzájom vymeníme. Len čo teda prvú rovnicu upravíme na tvar $(a-c)(d-b) = 0$ a vykonáme v nej výmenu $b \leftrightarrow c$, dostaneme bez výpočtov ekvivalentný tvar $(a-b)(d-c) = 0$ druhej rovnice.

---

5 Na tabuli sú napísané čísla 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. V každom kroku čísla a, b, c napísané na tabuli zotrieme a nahradíme ich číslami ab, bc, ca. Zistite, či po nenulovom počte krokov bude niektoré z čísel napísaných na tabuli prirodzené.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie 1:

Dokážeme, že žiadne prirodzené číslo sa už neobjaví.

Po prvom kroku dostaneme čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$. Po druhom kroku dostaneme čísla $\sqrt{2\cdot 3}$ čiže $\sqrt{6}$, $\sqrt{2\cdot 6}$ čiže $2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3\cdot 6}$ čiže $3\sqrt{2}$. Dostali sme teda opäť tri kladné celočíselné násobky čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$. Vysvetlíme, že trojicu takéhoto typu dostaneme aj po každom ďalšom kroku. (Poznamenajme, že na výsledok žiadneho kroku zrejme nemá vplyv, v akom poradí sú aktuálne čísla na tabuli zapísané.)

Predpokladajme teda, že po určitom počte krokov sú na tabuli zapísané tri čísla tvaru $r\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ a $t\sqrt{6}$, pričom r, s, t sú vhodné kladné celé čísla. Potom po nasledujúcom kroku budú na tabuli čísla $(r\sqrt{2})\cdot(s\sqrt{3})$ čiže $rs\sqrt{6}$, $(s\sqrt{3})\cdot(t\sqrt{6})$ čiže $3st\sqrt{2}$, a $(t\sqrt{6})\cdot(r\sqrt{2})$ čiže $2rt\sqrt{3}$, teda opäť kladné celočíselné násobky čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$.

Keďže čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ sú iracionálne, žiadny z ich kladných celočíselných násobkov nie je celé číslo. Tým je tvrdenie z úvodu riešenia dokázané.

Riešenie 2:

Všimnime si, že všetky čísla na tabuli v ktoromkoľvek okamihu majú tvar $\sqrt{2}^p\cdot\sqrt{3}^q$, kde p a q sú nejaké prirodzené čísla. Na začiatku sú tam totiž čísla 1 čiže $\sqrt{2}^0\cdot\sqrt{3}^0$, $\sqrt{2}$ čiže $\sqrt{2}^1\cdot\sqrt{3}^0$, $\sqrt{3}$ čiže $\sqrt{2}^0\cdot\sqrt{3}^1$, a ak p_1, q_1, p_2, q_2 sú prirodzené čísla, tak

$$\left(\sqrt{2}^{p_1}\cdot\sqrt{3}^{q_1}\right)\cdot\left(\sqrt{2}^{p_2}\cdot\sqrt{3}^{q_2}\right) = \sqrt{2}^{p_1+p_2}\cdot\sqrt{3}^{q_1+q_2}.$$

Číslo $\sqrt{2}^p\cdot\sqrt{3}^q$ je prirodzené práve vtedy, keď sú obe čísla p a q párne.

Úlohu tak môžeme ekvivalentne preformulovať takto: Na tabuli sú napísané dvojice prirodzených čísel $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. V každom kroku dvojice (r,s), (t,u), (v,w) napísané na tabuli zotrieme a nahradíme ich dvojicami $(r+t, s+u)$, $(t+v, u+w)$, $(v+r, w+s)$. Zistite, či po nenulovom počte krokov bude niektorá z dvojíc na tabuli mať obe zložky párne čísla.

Všimnime si paritu zložiek dvojíc na tabuli. Po prvom kroku sú na tabuli dvojice $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, sú teda postupne typov (nepárne, párne), (nepárne, nepárne), (párne, nepárne). Ukážeme, že tieto tri typy už budú na tabuli aj po každom ďalšom kroku (i keď možno v inom poradí):

- Ak je (m,n) typu (nepárne, párne) a (p,q) typu (nepárne, nepárne), tak $(m+p, n+q)$ je typu (párne, nepárne).
- Ak je (m,n) typu (nepárne, nepárne) a (p,q) typu (párne, nepárne), tak $(m+p, n+q)$ je typu (nepárne, párne).
- Ak je (m,n) typu (párne, nepárne) a (p,q) typu (nepárne, párne), tak $(m+p, n+q)$ je typu (nepárne, nepárne).

To však znamená, že sa na tabuli už nikdy nevyskytne dvojica typu (párne, párne).

Odpoveď na otázku upravenej úlohy, a teda i na otázku zo zadania, je teda negatívna.

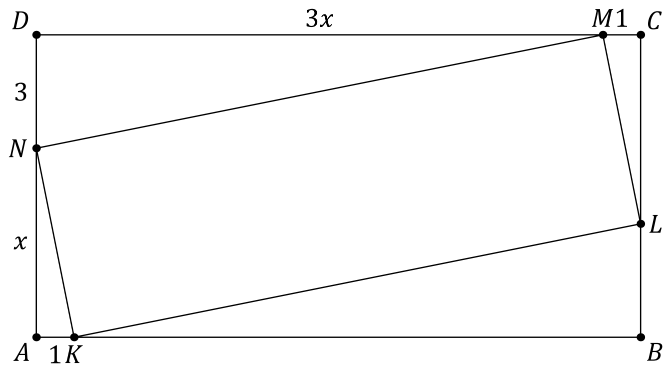
---

6 Daný je obdĺžnik $ABCD$, pričom $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA sú dané postupne body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdĺžnik a platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočítajte pomer obsahov obdĺžnikov $ABCD$ a $KLMN$.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Dokážeme, že pravouhlé trojuholníky AKN a DNM sú podobné. Keďže uhol KNM je pravý, uhly KNA a DNM sa dopĺňajú do 90°. To isté však platí o uhloch DNM a NMD pravouhlého trojuholníka DNM. Dostávame tak zhodnosť ostrých uhlov KNA a NMD, a tak sú trojuholníky AKN a DNM pri tomto poradí vrcholov podľa vety *uu* naozaj podobné. Pomer ich podobnosti určíme ako pomer dĺžok ich prepôn $|NM| : |KN|$, ktorý je ako pomer $|KL| : |LM|$ podľa zadania rovný $3 : 1$.



Analogicky sa zdôvodní vzájomná podobnosť všetkých štyroch pravouhlých trojuholníkov AKN, DNM, CML a BLK, ktoré „obklopujú“ obdĺžnik $KLMN$. Trojuholníky AKN a CML (rovnako ako DNM a BLK) sú dokonca zhodné, pretože ich prepony sú protiľahlými stranami obdĺžnika.

Bez ujmy na všeobecnosti sme dĺžku úsečky AK označili na obrázku číslom 1 a dĺžku úsečky AN premennou x. Z dokázaných podobností a zhodností potom máme $|DN| = 3$, $|DM| = 3x$ a $|CM| = 1$, a teda $|AB| = |CD| = 3x + 1$ a $|BC| = |AD| = x + 3$. Dosadením do zadaného pomeru $|AB| : |BC| = 2 : 1$ dostaneme rovnicu $(3x + 1) = 2(x + 3)$ s jediným riešením 5, ktorému zodpovedajú vzťahy $|AB| = 16$ a $|BC| = 8$. Obdĺžnik $ABCD$ s obsahom $16 \cdot 8$ čiže 128 je zjednotením obdĺžnika $KLMN$ s trojuholníkmi AKN, CML (tie majú dokopy obsah $1 \cdot 5$ čiže 5) a trojuholníkmi DNM, BLK (s celkovým obsahom $3 \cdot 15$ čiže 45). Preto $\mathrm{S}(KLMN) = 128 - 5 - 45 = 78$. Z toho $\mathrm{S}(KLMN) : \mathrm{S}(ABCD) = 78 : 128 = 39 : 64$.