

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

- 1 Zajac sa zúčastnil na pretekoch dlhých 2024 metrov. Zo štartovej čiary sa odrazil ľavou nohou a po celý čas pretekov pravidelne striedal ľavú, pravú a obe nohy. Keď sa zajac odrazil ľavou nohou, skočil 35 dm, keď sa odrazil pravou nohou, skočil 15 dm, a keď sa odrazil oboma nohami, skočil 61 dm.

Koľko skokov zajac urobil, kým dorazil do cieľa? Ktorou nohou sa odrazil pri cieľovom skoku?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Preteky sú dlhé 20 240 dm a opísaný zajacov trojskok meria $35 \text{ dm} + 15 \text{ dm} + 61 \text{ dm} =$ čiže 111 dm. Delením so zvyškom zistíme, že

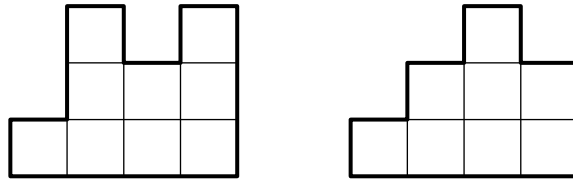
$$20\,240 \text{ dm} = 182 \cdot 111 \text{ dm} + 38 \text{ cm}.$$

Teda po 182 trojskokoch zostáva zajacovi do cieľa 38 dm.

Ďalší odraz vychádza na ľavú nohu, skočí 35 dm, a do cieľa zostávajú 3 dm. Ďalší odraz vychádza na pravú nohu a týmto skokom preskočí cieľ.

Celkom zajac urobí $182 \cdot 3 + 2$ čiže 548 skokov, pred cieľovým skokom sa odrazí pravou nohou.

- 2 Zuzka postavila zo šestnástich rovnako veľkých kociek kváder s pôdorysom 4×4 . S ďalšími rovnako veľkými kockami pokračovala v stavaní. Kocky ukladala tak, že každé dve susedné mali spoločnú celú stenu. Výsledná stavba vyzerala z dvoch rôznych strán ako na nasledujúcom obrázku.

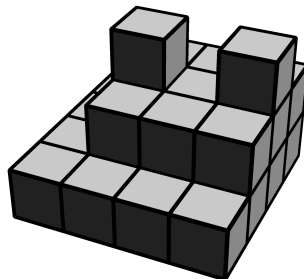


Zistite, koľko najviac a koľko najmenej kociek mohla Zuzka na svoju stavbu použiť.

(Erika Novotná)

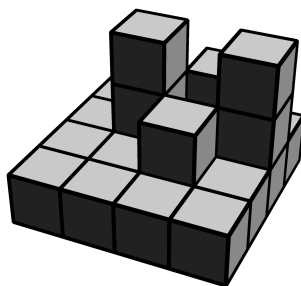
Riešenie:

V prvej vrstve bolo 16 kociek. Z uvedených pohľadov vyplýva, že v tretej vrstve boli 2 kocky. Počet kociek v druhej vrstve nie je možné jednoznačne určiť, najviac ich však mohlo byť $3 \cdot 3$ čiže 9. Táto možnosť je znázornená na nasledujúcom obrázku, v ktorom dva zadané priemety zodpovedajú pohľadu spredu a sprava:



Naozaj nie je možné pridať jedinú kocku, aby sa nezmenil niektorý z daných priemetov. Zuzka použila najviac $16 + 9 + 2$ čiže 27 kociek.

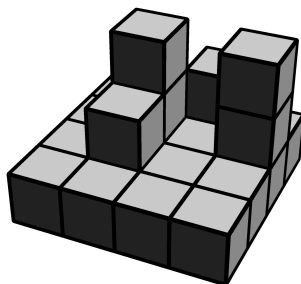
K najmenšiemu možnému počtu kociek je možné dospieť tak, že sa z druhej vrstvy postupne odoberá čo najviac kociek bez toho, aby sa zmenil niektorý z daných priemetov. Jedna taká možnosť vyzerá takto:



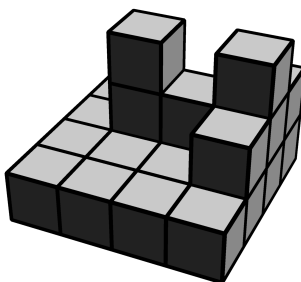
Menej ako 4 kocky v druhej vrstve byť nemôžu. Dve kocky, na ktorých stoja kocky z tretej vrstvy, sú pri pohľade sprava v zákryte. Preto musia byť použité ďalšie dve kocky, aby tento priemet súhlasil so zadaním. Zuzka použila najmenej $16 + 4 + 2$ čiže 22 kociek.

Poznámka:

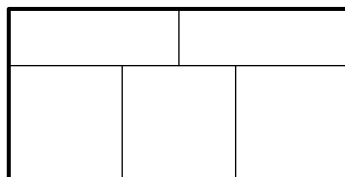
Pri možnosti s najmenším počtom kociek môžu byť kocky v druhej vrstve rozmiestnené rôzne, avšak nie ľubovoľne. Iné možné rozmiestnenie je toto:



Úpravami v druhej vrstve je možné mať stavbu s akýmkoľvek počtom kociek v rozsahu od 22 do 27 kociek. Tu je jedna možnosť postavená z 23 kociek:



3 Katka mala v záhradke päť záhonov rozmiestnených ako na obrázku.



Do záhonov chcela zasadiť cesnak, mrkvu a reďkvičku tak, aby na každom záhone bol len jeden druh zeleniny a aby žiadne dva záhony s rovnakou zeleninou nesusedili. Koľkými rôznymi spôsobmi mohla Katka do záhonov zasadiť cesnak, mrkvu a reďkvičku?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Záhony s rovnakou zeleninou označíme rovnakým písmenom, záhony s rôznymi zeleninami rôznymi písmenami. Aby záhony s rovnakou zeleninou nesusedili, musia byť vysadené takto:

A		B	
B	C	A	

Do záhonov A môže Katka zasadiť ľubovoľnú z troch plodín, do záhonov B ľubovoľnú zo zvyšných dvoch plodín a do C poslednú zvyšnú plodinu. Katka teda môže záhony vysadiť $3 \cdot 2$ čiže 6 spôsobmi.

Poznámka:

Všetky možné priradenia plodín záhonom sú systematicky vypísané tu:

cesnak	A	A	B	B	C	C
mrkva	B	C	A	C	A	B
red'kvička	C	B	C	A	B	A

- 4 V záhradkárskej osade mal pán Jahoda vo svojom sude 16 litrov vody. Sused pán Malina mal vo svojom sude trikrát viac vody ako pán Jahoda. Začalo pršať a do oboch sudov napršalo rovnaké množstvo vody. Po daždi pán Malina zistil, že má v sude dvakrát viac vody ako pán Jahoda.

Koľko litrov vody napršalo do každého suda?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

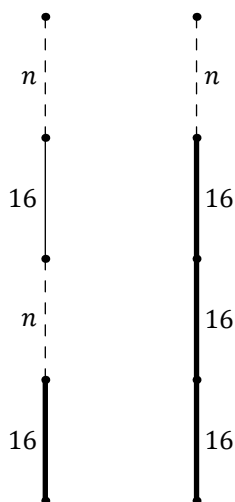
Pred dažďom mal pán Malina vo svojom sude $3 \cdot 16$ čiže 48 litrov vody, čo je o 32 litrov viac než v sude pána Jahodu.

Do oboch sudov napršalo rovnako, teda rozdiel množstva vody v sudoch po daždi bol opäť 32 litrov ako pred dažďom. Po daždi bolo v sude pána Malinu dvakrát viac vody ako v sude pána Jahodu, teda v Jahodovom sude bolo 32 a v Malinovom sude 64 litrov vody.

Do každého suda napršalo 16 litrov vody ($48 - 32 = 64 - 48 = 16$).

Poznámka:

Situáciu je možné znázorniť pomocou úsečiek

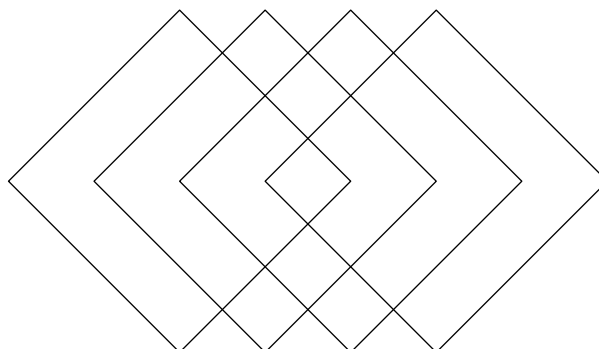


či zapísať rovnicou

$$2 \cdot 16 + 2n = 3 \cdot 16 + n,$$

pričom n označuje množstvo napršanej vody v litroch.

5 Zo štyroch zhodných štvorcov bol vytvorený ornament ako na obrázku.



Strany štvorcov sú dlhé 4 cm, sú navzájom rovnobežné alebo kolmé a pretínajú sa buď vo svojich štvrtinách, alebo poloviciach. Libor chcel ornament vyfarbiť a zistil, že farba na 1 cm^2 každého súvislého poľa ho bude stáť toľko eur, koľkým štvorcov je toto pole spoločné.

Koľko eur bude stáť farba na vyfarbenie celého ornamentu?

(Karel Pazourek)

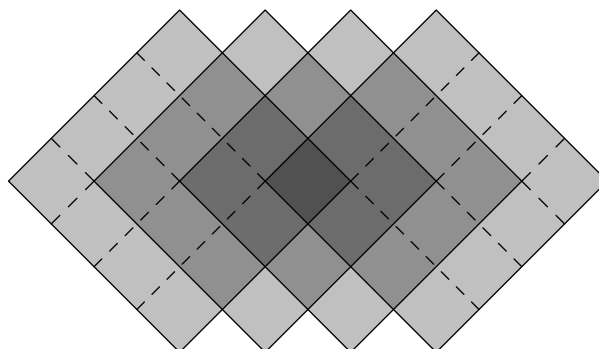
Riešenie 1:

Cena farby v každej časti zodpovedá počtu štvorcov, ktorým je táto časť spoločná. To je rovnaké, ako by všetky štvorce boli samostatne vyfarbené farbou rovnakej ceny.

Každý štvorec má obsah $4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$ čiže 16 cm^2 , štvorce sú štyri a 1 cm^2 farby stojí 1 euro. Teda farba na vyfarbenie ornamentu bude stáť $16 \cdot 4$ čiže 64 eur.

Riešenie 2:

Rôznymi odtieňmi sivej rozlíšime, koľkým štvorcov sú jednotlivé časti ornamentu spoločné. Ornament rozdelíme na štvorčeky so stranou 1 cm:



Všetkým štyrom štvorcov je spoločný 1 štvorček, trom štvorcov prislúcha 6 štvorčekov, dvom štvorcov 12 štvorčekov a jednému štvorcov 18. Teda farba na vyfarbenie ornamentu bude stáť $1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 1$ čiže 64 eur.

6 Lucka napísala na lístok číslo 12345 a dvakrát ho medzi ciframi rozstihla. Získala tak tri menšie kartičky s tromi číslami. Tieto kartičky zoradila dvoma spôsobmi, čím dostala dve rôzne päťciferné čísla. Rozdiel týchto dvoch čísel bol 28 926.

Medzi ktorými ciframi Lucka lístok rozstihla?

(Michaela Petrová)

Riešenie 1:

Pre názornosť si úlohu napíšeme ako písomné odčítanie, ktorého výsledok je 28 926 a kde hviezdičky na každom riadku zastupujú cifry od 1 do 5:

$$\begin{array}{r}
 * * * * * \\
 - * * * * * \\
 \hline
 2\ 8\ 9\ 2\ 6
 \end{array}$$

Cifru na mieste jednotiek je možné dostať jedine takto (s prechodom cez desiatku):

$$\begin{array}{r}
 * * * * 1 \\
 - * * * * 5 \\
 \hline
 2\ 8\ 9\ 2\ 6
 \end{array}$$

So zvyšnými použiteľnými ciframi možno cifru na mieste desiatok dostať jedine niektorým z nasledujúcich spôsobov:

$$\begin{array}{r} * * * 4 1 \\ - * * * 1 5 \\ \hline 2 8 9 2 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} * * * 5 1 \\ - * * * 2 5 \\ \hline 2 8 9 2 6 \end{array}$$

- V prvom prípade by lístok musel byť rozstrihnutý takto 1|234|5 a kartičky preskladané 5|234|1 a 234|1|5. V tomto prípade rozdiel vyhovuje zadaniu:

$$\begin{array}{r} 5 2 3 4 1 \\ - 2 3 4 1 5 \\ \hline 2 8 9 2 6 \end{array}$$

- V druhom prípade by lístok musel byť rozstrihnutý takto 1|2|34|5, čo sú tri (a nie dva) strihy. Tento prípad nevyhovuje zadaniu.

Lucka lístok rozstrihla medzi ciframi 1 a 2 a medzi ciframi 4 a 5.

Poznámka:

Nutnosť strihu medzi ciframi 1 a 2 vyplýva už z prvého postrehu. Nutnosť strihu medzi ciframi 4 a 5 (a následného preskladania) vyplýva z tejto úvahy: ak by pred cifrou 5 bola cifra 4, tak by sme museli vedieť doplniť:

$$\begin{array}{r} * * * * 1 \\ - * * * 4 5 \\ \hline 2 8 9 2 6 \end{array}$$

V takom prípade by v menšenci na mieste desiatok musela byť cifra 7, ktorú však nemáme k dispozícii.

Riešenie 2:

Lístok je možné na dvakrát rozstrihnúť šiestimi spôsobmi:

- 1|2|345,
- 1|23|45,
- 1|234|5,
- 12|3|45,
- 12|34|5,
- 123|4|5.

Vzniknuté tri kartičky A, B, C je možné preskladať šiestimi spôsobmi, čo schematicky (vzostupne) zapíšeme takto:

- $A|B|C$,
- $A|C|B$,
- $B|A|C$,
- $B|C|A$,
- $C|A|B$,
- $C|B|A$.

Prebratím všetkých možností je možné nájsť rozstrihania a preskladania, ktoré vyhovujú zadaniu.

Namiesto skúmania možných rozdielov (ktorých je pre každé rozstrihanie 15) je možné postupovať tak, že k príslušnej šestici čísel pripočítame požadovaný rozdiel 28926 a overíme, či je medzi výsledkami niektoré číslo z danej šestice. Najväčšie číslo, ktoré je možné z cifier od 1 do 5 vytvoriť, je 54321. Teda najväčšie číslo, ku ktorému má zmysel požadovaný rozdiel pripočítať, je 25395. Tým sa skúšanie podstatne obmedzuje a vyzera nasledovne (opakujúce sa či vopred zamietnuté možnosti píšeme do zátvoriek):

- Po rozstrihaní 1|2|345 je možné zostaviť čísla 12345, 13452, 21345, 23451, 34512, 34521. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 42378, 50271, 52377 a ďalšie dve čísla väčšie než 54321. Žiadna možnosť nevyhovuje.
- Po rozstrihaní 1|23|45 je možné zostaviť čísla 12345, 14523, 23145, 23451, 45123, 45231. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 43449, 52071, 52377 a ďalšie dve čísla väčšie než 54321. Žiadna možnosť nevyhovuje.

- Po rozstrihaní 1|234|5 je možné zostaviť čísla 12345, 15234, 23415, 23451, 51234, 52341. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 44160, 52341, 52377 a ďalšie dve čísla väčšie než 54321. Vyhovuje možnosť 23451.
- Po rozstrihaní 12|3|45 je možné zostaviť čísla 12345, 12453, 31245, 34512, 45123, 45312. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 41379 a ďalšie štyri čísla väčšie než 54321. Žiadna možnosť nevyhovuje.
- Po rozstrihaní 12|34|5 je možné zostaviť čísla 12345, 12534, 34125, 34512, 51234, 53412. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 41460 a ďalšie štyri čísla väčšie než 54321. Žiadna možnosť nevyhovuje.
- Po rozstrihaní 123|4|5 je možné zostaviť čísla 12345, 12354, 41235, 45123, 51234, 54123. Po pripočítaní 28926 postupne dostávame 41271, 41280 a ďalšie štyri čísla väčšie než 54321. Žiadna možnosť nevyhovuje.

Jediná vyhovujúca možnosť teda je, že Lucka lístok rozstrihla medzi ciframi 1 a 2 a medzi ciframi 4 a 5.

Poznámka:

V prvom prípade je rozdiel najväčšieho a najmenšieho čísla z danej šestice 22176. Všetky ostatné rozdiely sú menšie, preto požadovaný rozdiel 28926 dostať nemožno a nebolo nutné čokoľvek ďalej skúšať.
