
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

1 Ajka, Barborka, Cilka a Daniel sa dohadovali o počte zrníek piesku na ich pieskovisku. Daniel povedal kamarátkam svoj odhad a tie sa ho rozhodli overiť. Ajka narátala 873 451 230, Barborka 873 451 227 a Cilka 873 451 213 zrníek piesku. Súčet (kladných) rozdielov týchto troch výsledkov od Danielovho odhadu bol 29.

Koľko zrníek piesku mohol odhadnúť Daniel? Uveďte všetky možnosti.

(Veronika Bachratá)

Riešenie:

Najmenej zrníek napočítala Cilka, najviac Ajka. Rozdiel výsledkov Cilky a Barborky je 14, rozdiel výsledkov Barborky a Ajky je 3, rozdiel výsledkov Cilky a Ajky je 17. Ak by Danielov odhad súhlasil s niektorým z týchto troch výsledkov, tak by spomínaný súčet rozdielov bol určený iba dvoma sčítancami:

- Ak by Danielov odhad súhlasil s výsledkom Cilky, tak by súčet rozdielov od zvyšných výsledkov bol $14 + 17$ čiže 31.
- Ak by Danielov odhad súhlasil s výsledkom Barborky, tak by súčet rozdielov od zvyšných výsledkov bol $14 + 3$ čiže 17.
- Ak by Danielov odhad súhlasil s výsledkom Ajky, tak by súčet rozdielov od zvyšných výsledkov bol $17 + 3$ čiže 20.

Pre iné hodnoty Danielovho odhadu platí:

- Ak by Danielov odhad bol menší ako výsledok Cilky, tak by súčet rozdielov od všetkých výsledkov bol väčší ako 31.
- Ak by Danielov odhad bol medzi výsledkami Cilky a Barborky, tak by súčet rozdielov od všetkých výsledkov bol medzi 31 a 17.
- Ak by Danielov odhad bol medzi výsledkami Barborky a Ajky, tak by súčet rozdielov od všetkých výsledkov bol medzi 17 a 20.
- Ak by Danielov odhad bol väčší ako výsledok Ajky, tak by súčet rozdielov od všetkých výsledkov bol väčší ako 20.

Teda Danielov odhad mohol byť medzi výsledkami Cilky a Barborky, alebo byť väčší ako výsledok Ajky. Postupným skúšaním v rámci týchto obmedzení odhalíme nasledujúce dve možnosti:

- Ak by Danielov odhad bol 873 451 215, tak by súčet rozdielov od výsledkov troch kamarátok bol $2 + 12 + 15$ čiže 29.
- Ak by Danielov odhad bol 873 451 233, tak by súčet rozdielov od výsledkov troch kamarátok bol $20 + 6 + 3$ čiže 29.

Daniel teda odhadoval počet zrníek v pieskovisku buď na 873 451 215, alebo na 873 451 233.

Poznámka:

Predchádzajúce skúšanie je možné nahradiť niekoľkými výpočtami. Napr. za predpokladu, že Danielov odhad je medzi výsledkami Cilky a Barborky, je súčet rozdielov od výsledkov troch kamarátok

$$(d - 873\,451\,213) + (873\,451\,227 - d) + (873\,451\,230 - d)$$

čiže $873\,451\,244 - d$, kde d je Danielov odhad. Tento súčet je rovný 873 451 229 práve vtedy, keď platí $d = 873\,451\,215$, čo zodpovedá jednej z uvedených možností.

2 Pán Delfín a pán Žralok boli zdatní rybári. Raz dokopy ulovili 70 rýb. Päť devätín z rýb, ktoré ulovil pán Delfín, boli pstruhy. Dve sedemnástiny z rýb, ktoré ulovil pán Žralok, boli kapry.

Koľko rýb ulovil pán Delfín?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Počet rýb, ktoré ulovil pán Delfín, bol násobkom 9 a nepresahoval 70. Pán Delfín teda mohol uloviť 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63 rýb. Počet rýb, ktoré ulovil pán Žralok, bol násobkom 17 a nepresahoval 70. Pán Žralok teda mohol uloviť 17, 34, 51, 68 rýb. Dokopy ulovili 70 rýb, čo je možné z uvedených čísel vyjadriť jedine ako $70 = 36 + 34$. Pán Delfín ulovil 36 rýb.

Poznámka:

Pre predchádzajúci výsledok nie je nutné skúšať všetky možné súčty (ktorých je $7 \cdot 4$ čiže 28). Stačí prebrať štyri možné počty x rýb pána Žraloka, zistiť, koľko rýb by zodpovedalo pánovi Delfínovi ($70 - x$) a overiť, či je tento počet deliteľný 9:

x	$70 - x$	$9 \mid 70 - x?$
17	53	nie
34	36	áno
51	19	nie
68	2	nie

- 3 Myslím si tri čísla. Keď ich sčítam, dostanem 15. Keď od súčtu prvých dvoch čísel odčítam tretie, dostanem 10. Keď od súčtu prvého a tretieho čísla odčítam druhé, dostanem 8.

Ktoré čísla si myslím?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Uvažujme súčet prvých dvoch čísel. Pokiaľ k tomuto súčtu pripočítame tretie číslo, dostaneme 15, ak to isté číslo odpočítame, dostane 10. Rozdiel $15 - 10$ čiže 5 teda zodpovedá dvojnásobku tretieho čísla. Teda tretie číslo je $5 : 2$ čiže 2,5.

Uvažujme súčet prvého a tretieho čísla. Ak k tomuto súčtu pripočítame druhé číslo, dostaneme 15, ak to isté číslo odpočítame, dostaneme 8. Rozdiel $15 - 8$ čiže 7 teda zodpovedá dvojnásobku druhého čísla. Teda druhé číslo je $7 : 2$ čiže 3,5.

Súčet všetkých troch čísel je 15. Teda prvé číslo je $15 - 2,5 - 3,5$ čiže 9.

Myslíme si teda čísla 9, 3,5 a 2,5.

Poznámka:

Úlohu možno vyjadriť pomocou sústavy rovníc

$$a + b + c = 15,$$

$$a + b - c = 10,$$

$$a - b + c = 8,$$

pričom a , b a c je postupne prvé, druhé a tretie číslo. Predchádzajúce úvahy možno zapísať nasledovne:

$$2c = (a + b + c) - (a + b - c) = 15 - 10 = 5,$$

teda $c = 2,5$,

$$2b = (a + b + c) - (a - b + c) = 15 - 8 = 7,$$

teda $b = 3,5$,

$$a = (a + b + c) - b - c = 15 - 2,5 - 3,5 = 9.$$

- 4 Anetkin strýko má narodeniny v ten istý deň v roku ako Anetkina teta. Strýko je starší ako teta, nie však o viac ako desať rokov, a obaja sú plnoletí. Na poslednej oslave si Anetka uvedomila, že keď vynásobí ich oslavované veky a výsledný súčin ešte vynásobí počtom psov, ktorí sa na oslave zišli, dostane číslo 2024.

Koľko psov mohlo byť na tejto oslave? Určte všetky možnosti.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Číslo 2024 potrebujeme vyjadriť ako súčin troch prirodzených čísel, z ktorých dve sú väčšie alebo rovnaké ako 18 a líšia sa najviac o 10. Vyhovujúce možnosti preberieme na základe prvočíselného rozkladu čísla 2024, a to $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$. Prvočísla 11 a 23 patria k vekom tety a strýka, navyše každé niekomu inému. Ak by to tak nebolo, tak by z daných prvočísel nebolo možné vytvoriť dva činitele väčšie ako 18. Navyše žiadny z vekov nemôže byť väčší ako $2 \cdot 23$ čiže 46 rokov. Najbližší vyšší možný vek je $2 \cdot 2 \cdot 23$ čiže 92 rokov, v takom prípade by z daných

prvočísel nebolo možné vytvoriť činiteľa, ktorý by sa od 92 líšil najviac o 10. Teda stačí prebrať nasledujúce možnosti:

- Ak by mala teta alebo strýko 23 rokov, tak by druhý musel mať medzi 18 a 33 rokmi. Z možných činiteľov tomuto obmedzeniu vyhovuje iba $2 \cdot 11$ čiže 22. Teda teta mohla mať 22 a strýko 23 rokov. V tomto prípade by na oslave boli $2 \cdot 2$ čiže 4 psi.
- Ak by mala teta alebo strýko $2 \cdot 23$ čiže 46 rokov, tak by druhý musel mať medzi 36 a 56 rokmi. Z možných činiteľov tomuto obmedzeniu vyhovuje iba $2 \cdot 2 \cdot 11$ čiže 44. Teda teta mohla mať 44 a strýko 46 rokov. V tomto prípade by na oslave bol 1 pes.

Na oslave bol buď 1 pes, alebo 4 psi.

Poznámka:

Súčin vekov tety a strýka bol väčší ako $18 \cdot 18$ čiže 324. Teda počet psov na oslave bol rovný nanajvýš celej časti podielu $2024 : 324$, čo je 6. Z daných prvočísel je možné zostaviť iba čísla 1, 2 a 4. Rozbor možností je možné založiť na týchto troch prípadoch:

- Prípady s 1 psom alebo so 4 psami možné sú, pozri predchádzajúce riešenie.
- Prípady s 2 psami možný nie je. Súčin vekov tety a strýka by bol $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, čo je možné rozdeliť na dva činitele 22 a 46 alebo 44 a 23. V oboch rozkladoch je však rozdiel činiteľov väčší ako 10.

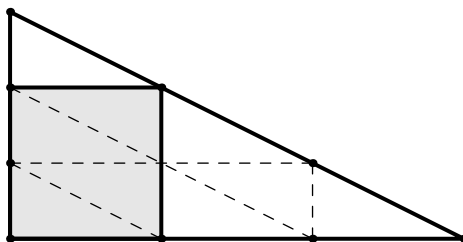
5 Pravouhlý trojuholník má obsah 36 m^2 . V ňom je umiestnený štvorec tak, že dve strany štvorca sú časťami dvoch strán trojuholníka a jeden vrchol štvorca je v tretine najdlhšej strany.

Určte obsah tohto štvorca.

(Erika Novotná)

Riešenie:

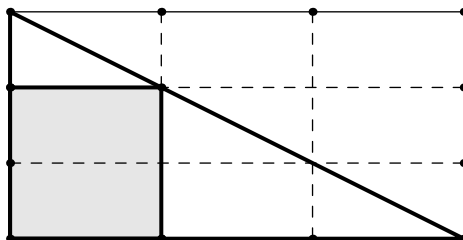
Jediné možné umiestnenie štvorca v rámci trojuholníka je ako na nasledujúcom obrázku. Dodatočné delenie strán na tretiny a spojenie zodpovedajúcich bodov pričkami rozdelí daný trojuholník na 9 zhodných trojuholníčkov:



Štvorec pozostáva zo štyroch trojuholníčkov, teda pomer obsahu štvorca a daného trojuholníka je $4 : 9$. Trojuholník má obsah 36 cm^2 , teda obsah štvorca je $\frac{4}{9} \cdot 36 \text{ cm}^2$ čiže 16 cm^2 .

Poznámka:

Obsah pravouhlého trojuholníka je polovicou obsahu doplneného obdĺžnika. Predchádzajúcu myšlienku s tretinovým delením možno rozvíjať aj podľa nasledujúceho obrázku:



Z uvedeného okrem iného vyplýva, že odvesny daného trojuholníka sú v pomere $1 : 2$.

V rámci daného trojuholníka je možné objaviť niekoľko navzájom podobných trojuholníčkov, ktoré je možné využiť na riešenie úlohy.

6 Trpaslíci počítajú svoje veki v dňoch, takže každý deň oslavujú narodeniny. U trpaslíka Nošteka sa zišlo sedem trpaslíkov s vekmi 105, 120, 140, 168, 210, 280 a 420 dní. Počas oslavy sa všetkým ôsmim trpaslíkom podarilo rozdeliť do dvoch skupín s rovnakými súčtami vekov.

Koľko najmenej a koľko najviac dní mohol mať trpaslík Noštek?

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

Pod vekom trpaslíka budeme rozumieť počet jeho dní. Súčet vekov všetkých návštevníkov je $105 + 120 + 140 + 168 + 210 + 280$ čiže 1443. Ak ich rozdelíme do dvoch skupín, vek Nošteka potom bude práve rozdiel súčtov vekov v oboch skupinách.

- Noštek má zrejme najviac dní vtedy, keď budú všetci návštevníci v tej istej skupine a v druhej bude on sám. Jeho vek je vtedy 1443.
- Noštek má najmenej dní vtedy, keď budú zvyšní trpaslíci rozdelení do dvoch skupín s čo najmenším rozdielom vekov, t. j. tak, aby súčty ich vekov v oboch skupinách boli čo najbližšie k číslu $1443 : 2$ čiže 721,5.

Systematicky rozoberme prípady tej skupiny návštevníkov, v ktorej je trpaslík s vekom 420, a rozdiel súčtu ich vekov od 721,5:

- 420: Rozdiel je 301,5.
- 420 a 280: Súčet je 700, takže rozdiel je 21,5.
- 420, 280 a ešte aspoň jeden ďalší vek: Súčet je aspoň $700 + 105$ čiže 805, takže rozdiel je aspoň 79,5.
- 420 a 210: Súčet je 630, takže rozdiel je 91,5.
- 420, 210 a ešte aspoň jeden ďalší vek spomedzi 105, 120, 140, 168: Súčet je aspoň $630 + 105$ čiže 735, takže rozdiel je aspoň 13,5.
- 420 a 168: Súčet je 588, takže rozdiel je 133,5.
- 420, 168 a 140: Súčet je 728, takže rozdiel je 6,5.
- 420, 168 a 120: Súčet je 708, takže rozdiel je 13,5.
- 420, 168, 120 a 105: Súčet je 813, takže rozdiel je 91,5.
- 420, 168 a 105: Súčet je 695, takže rozdiel je 26,5.
- 420 a 140: Súčet je 560, takže rozdiel je 161,5.
- 420, 140 a 120: Súčet je 680, takže rozdiel je 41,5.
- 420, 140, 120 a 105: Súčet je 785, takže rozdiel je 63,5.
- 420, 140 a 105: Súčet je 665, takže rozdiel je 56,5.
- 420 a niektoré z 120 a 105: Súčet je najviac 645, takže rozdiel je 86,5.

Možnosť so súčtom najbližším k 721,5 je teda jediná, a to návštevníci s vekmi 420, 168 a 140 so súčtom 728. Druhú skupinu potom tvoria zvyšní návštevníci s vekmi 280, 210, 120 a 105 so súčtom 715, takže v tejto skupine je aj Noštek a jeho vek je $728 - 715$ čiže 13.

Noštek mohol mať najmenej 13 a najviac 1443 dní.

Riešenie 2:

Pod vekom trpaslíka budeme rozumieť počet jeho dní. Súčet vekov všetkých návštevníkov je $105 + 120 + 140 + 168 + 210 + 280$ čiže 1443. Ak ich rozdelíme do dvoch skupín, vek Nošteka potom bude práve rozdiel súčtov vekov v oboch skupinách.

- Noštek má zrejme najviac dní vtedy, keď budú všetci návštevníci v tej istej skupine a v druhej bude on sám. Jeho vek je vtedy 1443.
- Všimnime si, že okrem dvoch návštevníkov sa všetky veki končia na 0, veki zvyšných dvoch sa končia na 5 a na 8. Bez ujmy na všeobecnosti ich nazvime postupne X a Y.

Majme hľadané rozdelenie na dve skupiny. Rozoberme prípady:

- Nech sú obaja X a Y v tej istej skupine ako Noštek.
Súčet vekov v oboch skupinách sa potom končí na 0, takže vek Nošteka sa končí na 7.
- Nech je X v tej istej skupine ako Noštek a Y v inej.
Súčet vekov v oboch skupinách sa potom končí na 8, takže vek Nošteka sa končí na 3.
- Nech je X v inej skupine ako Noštek a Y v tej istej.
Súčet vekov v oboch skupinách sa potom končí na 5, takže vek Nošteka sa končí na 7.
- Nech sú obaja X a Y v inej skupine ako Noštek.

Súčet vekov v oboch skupinách sa potom končí na 3, takže vek Nošteka sa končí na 3.

Zhrnutím dostávame, že vek Nošteka sa končí na 3 alebo na 7.

Ak je vek Nošteka 13, požadované rozdelenie existuje: V prvej skupine budú trpaslíci s vekmi 13, 280, 210, 105 a 120 a v druhej 140, 168 a 420. V oboch skupinách je súčet vekov rovnaký, a to 728.

Ukážeme, že ani jeden z menších vekov, t. j. 3 a 7, nevyhovuje:

- Nech má Nošteček vek 3.

Potom je súčet vekov všetkých ôsmich trpaslíkov $1443 + 3$ čiže 1446, takže v každej skupine je súčet vekov $1446 : 2$ čiže 723. Trpaslíci s vekmi 105 a 168 teda budú v inej skupine ako trpaslík s vekom 3. Súčet vekov zvyšných trpaslíkov v tejto skupine je preto $723 - 105 - 168$ čiže 450. Keďže ich veky sú medzi číslami 120, 140, 210, 280 a 420, z ktorých všetky okrem 210 sú deliteľné 20, a 450 nie je deliteľné 20, v tejto skupine je aj trpaslík s vekom 210. Súčet vekov zvyšných trpaslíkov v tejto skupine je preto $450 - 210$ čiže 240. Keďže ich veky sú medzi číslami 120, 140, 280 a 420 a posledné dva sú väčšie než 240, sú medzi 120 a 140. Obe sú však menšie než 240 a ich súčet je väčší.

Tento prípad teda nemôže nastať.

- Nech má Nošteček vek 7.

Potom je súčet vekov všetkých ôsmich trpaslíkov $1443 + 7$ čiže 1450, takže v každej skupine je súčet vekov $1450 : 2$ čiže 725. Trpaslíci s vekmi 7 a 168 teda budú v inej skupine ako trpaslík s vekom 105. Súčet vekov zvyšných trpaslíkov v tejto skupine je preto $725 - 7 - 168$ čiže 550. Keďže ich veky sú medzi číslami 120, 140, 210, 280 a 420, z ktorých všetky okrem 210 sú deliteľné 20, a 550 nie je deliteľné 20, v tejto skupine je aj trpaslík s vekom 210. Súčet vekov zvyšných trpaslíkov v tejto skupine je preto $550 - 210$ čiže 340. Keďže ich veky sú medzi číslami 120, 140, 280 a 420 a posledné je väčšie než 340, sú medzi 120, 140 a 280. Všetky sú však menšie než 240, iné súčty so sčítancom 280 sú väčšie a súčet prvých dvoch je menší.

Tento prípad teda nemôže nastať.

Nošteček mohol mať najmenej 13 a najviac 1443 dní.
