65. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2023/2024
krajské kolo kategória A
Riešenie úloh

1. Valec na páse

Riešenie:

a) V sústave podložky je pohyb valivý, čo predstavuje postupný pohyb s rýchlosťou v_0 a s uhlovou rýchlosťou $\omega_0 = v_0/R$.

Pri prechode na pás s rovnakým smerom pohybu sa postupne rýchlosť ťažiska valca zvýši na hodnotu v_1 (vzhľadom na pás $v_1 - u$) účinkom sily šmykového trenia F_t, ktorá pôsobí na valec v smere pohybu valca, a uhlová rýchlosť sa účinkom momentu tejto sily $-R\,F_t$ zníži na hodnotu $\omega_1 = (v_1 - u) / R$ valivého pohybu, ktorým sa pohybuje valec na páse bez prekĺzavania.
Počas šmýkania je veľkosť sily trenia $F_t = f\,M\,g$. Pre rýchlosť postupného pohybu v sústave stola a uhlovú rýchlosť otáčania platí počas šmýkania

$$v(t) = v_0 + f\,g\,t \qquad \omega(t) = \omega_0 - (f\,M\,g\,R/\,I\,)\,t,$$

kde $I = M\,R^2$ je moment zotrvačnosti tenkostenného valca.
Šmýkanie trvá až kým valec nedosiahne podmienku valivého pohybu vzhľadom na pás

$$v_1 - u = R\,\omega_1.$$

Po dosadení dostaneme $v_0 + f\,g\,t_0 - u = R\,\omega_1 = R\,[v_0/R - (f\,g\,/R)\,t_0] = v_0 - f\,g\,t_0.$

Odtiaľ dostaneme čas šmýkania $t_0 = \dfrac{u}{2g\,f}$.

b) Rýchlosť postupného pohybu <u>vzhľadom na pás</u> a uhlovú rýchlosť valivého pohybu dostaneme po dosadení času šmýkania

$$v_1 - u = v_0 + f\,g\,t_0 - u = v_0 - \frac{u}{2} \qquad \omega_1 = \frac{1}{R}\left(v_0 - \frac{u}{2}\right).$$

Vzhľadom na podložku sa uhlová rýchlosť nemení, ale postupná rýchlosť

$$v_1 = v_0 + \frac{u}{2}.$$

c) Zmenu kinetickej energie valca určíme v sústave podložky. Zmena je rovná súčtu zmeny kinetickej energie postupného pohybu a kinetickej energie rotačného pohybu

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}M\left(v_1^2 - v_0^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right).$$

Po dosadení a úprave dostaneme $\Delta E_k = \dfrac{1}{4}M\,u^2$.

Motor, ktorý poháňa pás koná prácu, ktorá zabezpečí jeho rovnomerný chod. Práca sa premení na zvýšenie kinetickej energie a na teplo, ktoré sa uvoľní v dôsledku šmykového trenia valca na páse. Prácu sily trenia určíme v sústave pásu ako súčin trecej sily a dráhy pásu za čas t_0

$$W = F_t\,s = F_t\,u\,t_0 = \frac{1}{2}M\,u^2.$$

Rozdiel vykonanej práce a zvýšenia kinetickej energie predstavuje uvoľnené teplo

$$Q = W - \Delta E_k = \frac{1}{4}M\,u^2.$$

2. Elektrón v EM poli

Riešenie:

a) Na uvoľnenie elektrónu treba dodať energiu (vo forme fotónu) rovnú výstupnej práci fotokatódy

$$\frac{hc}{\lambda} = W_{\mathrm{K}}\text{, odkiaľ máme } \lambda = \frac{hc}{W_{\mathrm{K}}} \approx 776\ \text{nm.}$$

b) Na elektrón s nábojom $-e$ pôsobí elektrické pole s veľkosťou $E = \frac{U}{d}$ v smere $-x$ a magnetické pole v smere z

$$\boldsymbol{F} = -e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - e\,\boldsymbol{E}\,. \qquad (1)$$

Vzhľadom na orientáciu vektorov poľa sa elektrón pohybuje iba v rovine x–y, preto uvažujeme iba zložky vektora rýchlosti v_x a v_y. Rovnicu (1) vyjadríme v zložkovom tvare

$$F_x = -e v_y B + e E = m a_x$$

$$F_y = e v_x B = m a_y\,.$$

Ak uvážime, že zrýchlenie je deriváciou rýchlosti, dostávame sústavu diferenciálnych rovníc

$$-e v_y B + e E = m \dot{v}_x \qquad (2)$$

$$e v_x B = m \dot{v}_y\,. \qquad (3)$$

Zderivujeme (2) a za $\dot{v}_y$ dosadíme z rovnice (3). Dostaneme rovnicu

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x = 0\,.$$

Ide o rovnicu harmonického oscilátora s riešením

$$v_x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)\text{, kde } \omega = \frac{eB}{m}\,. \qquad (4)$$

Dosadením do rovnice (2) a jej riešením pre v_y dostávame

$$v_y(t) = -A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{E}{B}\,. \qquad (5)$$

V začiatočnom bode je $t = 0$, $v_x = v_y = 0$. Po dosadení do vzťahov (4) a (5) máme

$$v_x(0) = A\sin\alpha = 0 \quad \text{a} \quad v_y(0) = -A\cos\alpha + \frac{E}{B} = 0$$

keďže $A \neq 0$, je $\sin\alpha = 0$, a teda $\cos\alpha = \pm 1$ a tak $A = \pm\frac{E}{B}$.

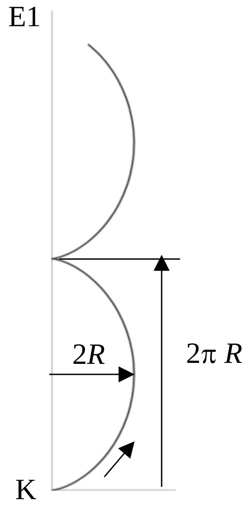
Elektrické pole vťahuje elektrón do priestoru medzi elektródami, teda v kladnom smere, preto A je kladné, preto platí znamienko +, a teda $\alpha = 0$.

$$v_x(t) = \frac{E}{B}\sin\omega t \quad \text{a} \quad v_y(t) = -\frac{E}{B}\cos\omega t + \frac{E}{B}.$$

Pohyb je superpozíciou rovnomerného pohybu v smere y rýchlosťou $v_0 = \frac{E}{B}$ a pohybu po kružnici s uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{eB}{m}$ a obvodovou rýchlosťou $v_\mathrm{m} = \frac{E}{B}$. Polomer kružnicovej trajektórie je potom $R = \frac{v_\mathrm{m}}{\omega} = \frac{mE}{eB^2}$.

Keďže na začiatku t = 0 je výsledná rýchlosť nulová, je v tomto mieste bod kružnice, v ktorom je rýchlosť pohybu po kružnici $-\frac{E}{B}$, takže stred kružnice má súradnice $x_\mathrm{S} = \frac{mE}{eB^2}$ a $y_\mathrm{S} = \frac{E}{B}t$.

Výsledná trajektória vzniká tak, ako keby sa kružnica s polomerom R kotúľala po elektróde E1, obr. RA–1. Krivka sa volá cykloida.



Obr. RA–1

c) Najvzdialenejší bod trajektórie od elektródy E1 je priemer kružnice

$$d_\mathrm{m} = 2R = 2\frac{mE}{eB^2} = 2\frac{mU}{eB^2 d_\mathrm{m}}, \text{ odkiaľ máme } d_\mathrm{m} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \approx 6{,}75 \text{ cm.}$$

Vzdialenosť v smere y je polovica dĺžky obvodu kružnice

$$y_\mathrm{m} = \pi R = \pi\frac{d_\mathrm{m}}{2} = \pi\frac{1}{B}\sqrt{\frac{mU}{2e}} \approx 10{,}6 \text{ cm}$$

3. Elektrický obvod

Riešenie:

a) Prúd záťaže

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{Z}} = \frac{\boldsymbol{U}_{\mathrm{v}}}{R_{\mathrm{v}} + \boldsymbol{Z}_{\mathrm{RLC}}}, \text{ kde } \boldsymbol{Z}_{\mathrm{RLC}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\left(R + \mathrm{j}\omega L\right)}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \text{ je impedancia záťaže.}$$

Prúd cievky je potom

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{Z}} \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} .$$

Po úprave dostaneme komplexný prúd cievky

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{v}} \frac{1}{R + R_{\mathrm{v}} - \omega^2 C R_{\mathrm{v}} L + \mathrm{j}\omega\left(L + C R_{\mathrm{v}} R\right)} .$$

Efektívna hodnota prúdu cievky je

$$I_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{v}} \frac{1}{\sqrt{\left(R + R_{\mathrm{v}} - \omega^2 C R_{\mathrm{v}} L\right)^2 + \omega^2 \left(L + C R_{\mathrm{v}} R\right)^2}} .$$

Prúd je maximálny, ak je výraz pod odmocninou minimálny. Ak tento výraz zderivujeme podľa premennej C a deriváciu položíme rovnú nule, dostaneme rovnicu

$$-2\left(R + R_{\mathrm{v}} - \omega^2 C_{\mathrm{m}} R_{\mathrm{v}} L\right)\omega^2 R_{\mathrm{v}} L + 2\left(\omega L + \omega C_{\mathrm{m}} R_{\mathrm{v}} R\right)\omega R_{\mathrm{v}} R = 0$$

a po úprave

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \approx 368 \text{ nF.}$$

b) Činný výkon je nenulový iba na rezistoroch, tzn. činný príkon záťaže rovný činnému výkonu zdroja je rovný výkonu na odpore cievky

$$P = R\, I_{\mathrm{L}}^2 .$$

Ak dosadíme kapacitu C_{m} dostaneme

$$P_{\max} = R\, I_{\mathrm{L}\max}^2 = \frac{U_{\mathrm{v}}^2}{R_{\mathrm{v}}^2} \frac{R}{\left(1 + \frac{R}{R_{\mathrm{v}}}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{\mathrm{v}}}\right)^2 - \frac{\left(\omega L\right)^2}{R^2 + \left(\omega L\right)^2}} \approx 1{,}05 \text{ W.}$$

4. Jadro Slnka

Riešenie:

a) Dva kladné protóny sú odpudzované elektrickou silou. Podľa zákona zachovania energie je v okamihu maximálneho priblíženia na vzdialenosť d_1 začiatočná kinetická energia protónov rovná potenciálnej energii v okamihu priblíženia

$$2\,E_\mathrm{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d_1} = m_\mathrm{p}\,v_1^2\,,\ \text{odkiaľ}\ v_1 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,m_\mathrm{p}}\frac{e^2}{d_1}} \approx 9{,}07\times10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \quad (1)$$

Rýchlosť je menšia ako 1/10 rýchlosti svetla vo vákuu, a preto možno pohyb riešiť metódou klasickej mechaniky.

b) Protóny majú 3 stupne voľnosti, tzn. na jeden protón prislúcha priemerná energia

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}\,v_1^2 = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}\,T_1\,.$$

Odtiaľ máme

$$T_1 = \frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}}v_1^2 = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0\,k_\mathrm{B}}\frac{e^2}{d_1} \approx 3{,}32\ \mathrm{GK}.$$

c) De Broglieho vlnová dĺžka protónu

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_\mathrm{p}\,v}\,.$$

Podľa úvahy v časti a) dostávame

$$2\,E_\mathrm{k2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\lambda/2} = m_\mathrm{p}\,v_2^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{m_\mathrm{p}\,e^2\,v_2}{h}\,,$$

odkiaľ

$$v_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{h} \approx 6{,}97\times10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

d) Zodpovedajúca teplota (pozri časť b))

$$T_2 = \frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}}v_2^2 = \frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{h}\right)^2 \approx 19{,}6\ \mathrm{MK}.$$

Ak výsledok porovnáme s udávanou hodnotou (14 ÷ 20) MK, vidíme, že tento zjednodušený model poskytuje celkom reálny výsledok.

Fyzikálna olympiáda – 65. ročník – úlohy krajského kola kat. A

Autori úloh:	Ľubomír Konrád 1, 2, Ivo Čáp 3, 4
Recenzia úloh:	Aba Teleki, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
Úlohy preložil:	Aba Teleki
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
	Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava 2024